Determinante – Kenngröße einer quadratischen Matrix

Erinnerung: Interpretation quadratischer Matrizen und Rang einer Matrix

- quadratische (reelle) Matrix: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ▶ 1

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ mit $a_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \forall\, i,j \in \{1,..,n\}$ (elementweise Beschreibung)

- $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ mit $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, k \in \{1,..,n\}$ (spaltenweise Beschreibung)

  $\vec{a}_k$: Spaltenvektor, k.te Spalte von A

- $A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ mit $b_\ell = (a_{\ell,1}, a_{\ell,2}, \ldots, a_{\ell,n}) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad \forall\, \ell \in \{1,..,n\}$ (zeilenweise Beschreibung)

  b_ℓ: Zeilenvektor, ℓ.te Zeile von A

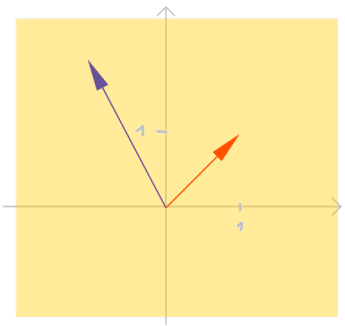
- Rang einer quadratischen Matrix ▶ 2

$$\operatorname{rang}(A) = \dim(\underbrace{\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, .., \vec{a}_n)}_{= \{\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + x_n \cdot \vec{a}_n \mid x_1, .., x_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n})$$

$$= \dim(\underbrace{\operatorname{span}(b_1, b_2, .., b_n)}_{= \{y = y_1 \cdot b_1 + y_2 \cdot b_2 + \ldots + y_n \cdot b_n \mid y_1, .., y_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}})$$

Beispiele:

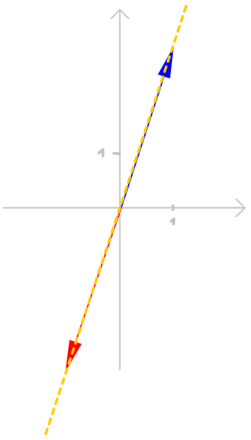
i) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ damit $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})) = 2$



Interpretation von $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Koordinatenvektor bzgl. Standardbasis des 2D-Anschauungsraumes

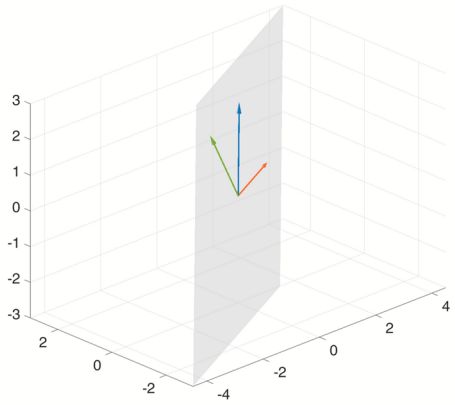
Dr. rer. nat. M. Striebel

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ damit $\text{rang}(A) = \dim\left(\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)\right) = 1$



Interpretation von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Koordinatenvektor bzgl. Standardbasis des 2D-Anschauungsraumes

iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ damit $\text{rang}(A) = \dim\left(\text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right) = 2$



bei Interpretation als Koordinatenvektoren bzgl. euklidischer Basis des 3D-Anschauungsraumes

Interpretation einer quadratischen Matrix (Kontext: lineare Abbildungen)

▶ 3

$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ mit $\vec{a}_k \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$

interpretierbar als Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

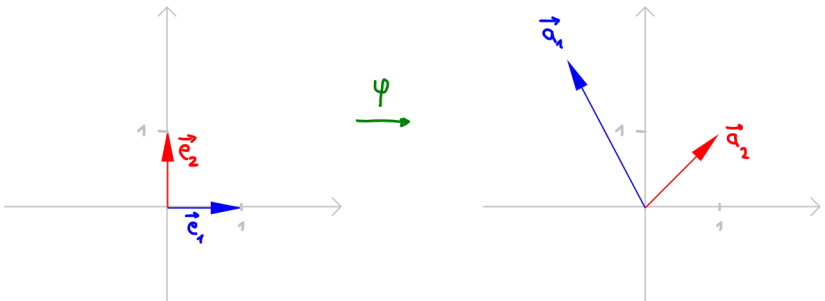
bei Nutzung der Standardeinheitsbasis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ für $\mathbb{R}^n$ als Definitions- & Zielbereich:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{a}_1, \quad \varphi(\vec{e}_2) = \vec{a}_2, \ldots, \quad \varphi(\vec{e}_n) = \vec{a}_n$$

für $n = 2$ und $n = 3$ auch grafisch interpretierbar (via Koordinatenvektorinterpretation bzgl. Standardeinheitsbasis des 2D- bzw. 3D-Anschauungsraums)

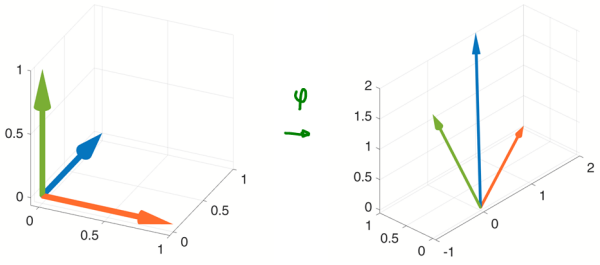
Beispiele:

i) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ hier: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

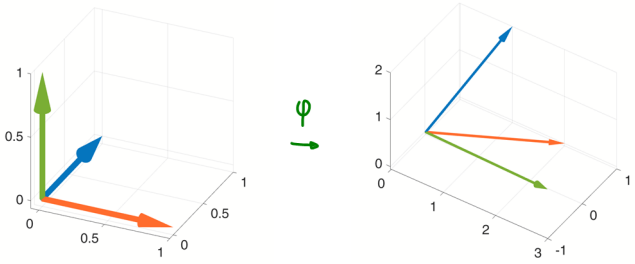


Dr. rer. nat. M. Striebel

iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ hier $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mit rang (A) = 3



Dr. rer. nat. M. Striebel

Definition und Berechnung der Determinante einer nxn-Matrix

Definition / Satz (Determinante und Berechnung nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz)

Sei $A = (a_{i,k})_{n,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Man nennt dann

$$\det(A) = |A| = \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

die *Determinante von* A.

Für $n = 1$ ist $\det(A) = \det(a_{1,1}) := a_{1,1}$

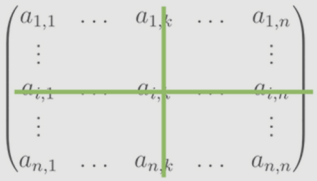
Für $n > 1$ kann man kann man $\det(A)$ rekursiv, dem *Laplaceschen Entwicklungssatz* folgend, durch eine der folgenden *Entwicklungen* berechnen:

- Entwicklung nach der $i$ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{i,k} \cdot \det(A_{i,k})$$

- Entwicklung nach der $k$ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{i,k} \cdot \det(A_{i,k})$$



wobei $A_{i,k}$ die $(n-1)\times(n-1)$-Untermatrix von A ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $k$ten Spalte entsteht.

Bemerkungen:

i) Zur Bestimmung des Vorzeichens $(-1)^{i+k}$, d. h.
$(-1)^{\text{„Zeile“+„Spalte“}}$.
empfiehlt es sich, diese durch nebenstehendes „Schachbrettmuster“ zu bestimmen

$$\begin{matrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

ii) Spalten- & Zeilenentwicklung liefern immer denselben Wert.
D.h. die Determinante ist eine eindeutige Kennzahl

iii) Die Berechnung wird „günstig“, wenn als Entwicklungszeile / -spalte diejenige genommen wird, die möglichst viele Nullen enthält.

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiele:

▶ 5

i) $A = (-3) \Rightarrow \det(A) = -3$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

- $\det \begin{pmatrix} \oplus 1 & \ominus 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{1+k} \cdot a_{1,k} \cdot \det(A_{1,k})$

Entwicklung nach 1. Zeile

▪ Entwicklung nach der $i$ten Zeile: $i = 1$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{i,k} \cdot \det(A_{i,k})$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \cdot \underbrace{a_{1,1}}_{=1} \cdot \det(A_{1,1}) + \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} \cdot \underbrace{a_{1,2}}_{=2} \cdot \det(A_{1,2})$$

$\det(A_{1,1})$: (4) — $\det(A_{1,2})$: (3)

$$= 1 \cdot 1 \cdot \det(4) + (-1) \cdot 2 \cdot \det(3) = 1 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 4 - 6 = \underline{\underline{-2}}$$

- $\det \begin{pmatrix} \oplus 1 & \ominus 2 \\ \ominus 3 & \oplus 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -6 + 4 = \underline{\underline{-2}}$

Entw. nach 2. Spalte

Entwicklung nach der $k$ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{i,k} \cdot \det(A_{i,k})$$

allgemeine Betrachtung für 2×2 Matrizen (2 reihige Determinante)

▶ 6

Für $n = 2$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \oplus a_{1,1} & a_{1,2} \\ \ominus a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = + a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$$

Entw. nach 1. Spalte

Satz (2 reihige Determinante)

Es ist:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$$

Merkregel: $\det(2 \times 2 - \text{Matrix}) = \text{Hauptdiagonale} - \text{Nebendiagonale}$

Beispiel: i) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 7 \cdot (-3) = 1 \cdot 8 + 21 = 29$

ii) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 3(-1) = -3 + 3 = 0$

iii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1 - 2 = -3$

Dr. rer. nat. M. Striebel

allgemeine Betrachtung für 3×3 Matrizen – Sarrus-Regel

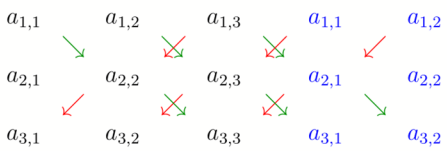
Satz (3-reihige Determinante, Regel von Sarrus)

Ist $A = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine 3×3-Matrix.

Dann ergibt sich die Determinante von A zu

$$\begin{aligned}\det(A) = \; & a_{1,1}\cdot a_{2,2}\cdot a_{3,3} \\ & + a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,1} \\ & + a_{1,3}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,2} \\ & - a_{1,2}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,3} \\ & - a_{1,1}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2} \\ & - a_{1,3}\cdot a_{2,2}\cdot a_{3,1}\end{aligned}$$

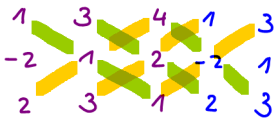
Schema:



nur für 3×3 – Matrizen möglich

Beispiel:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

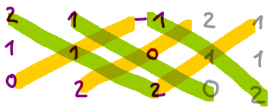


$\det(A) = 1\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 2 + 4\,(-2)\cdot 3 - 3\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1+12-24+6-6-8$

$= -19$

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

· mit Regel von Sarrus



$\det(A) = 2\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot 0$

$= 4 + 0 - 2 - 2 - 0 - 0 = 0$

· Entwicklung:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Entw. nach 2. Zeile

$= -1\cdot(1\cdot 2 - 2\,(-1)) + 1\cdot(2\cdot 2) = -(2+2) + 4 = -4+4 = 0$

Dr. rer. nat. M. Striebel

allgemeine Betrachtung für untere / obere Dreiecksmatrizen & Diagonalmatrizen

▶ 8

Satz (Determinante von unteren und oberen Dreiecksmatrizen)

Die Determinante einer (oberen oder unteren) Dreiecksmatrix, insbesondere einer Diagonalmatrix, ist das Produkt ihrer Diagonalelemente

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Beispiele:

i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -10 \\ 0 & 3 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2 = -6$

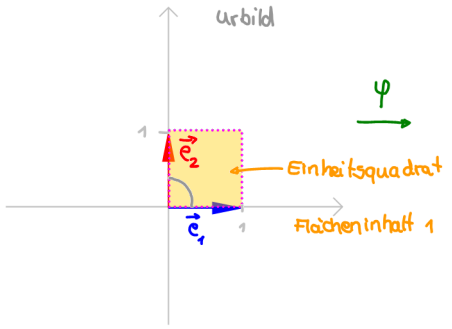
ii) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 \\ 8 & \sqrt{2} & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

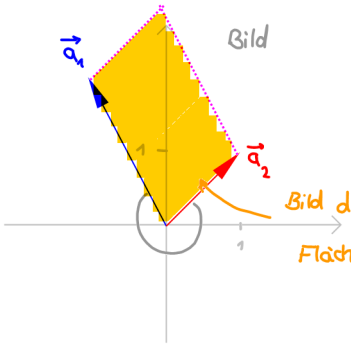
iii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Randbemerkung: Interpretation der Determinante für $n=2$ und $n=3$

▶ 9

i) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ hier: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$





Lineare Abbildung φ:
$\vec{e}_1 \mapsto \vec{a}_1$
$\vec{e}_2 \mapsto \vec{a}_2$

Bild des Einheitsquadrats unter φ
Flächeninhalt: 3 ⊛

- spitzer Winkel zwischen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bilden Rechtssystem

- stumpfer Winkel zwischen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ bilden ein Linkssystem

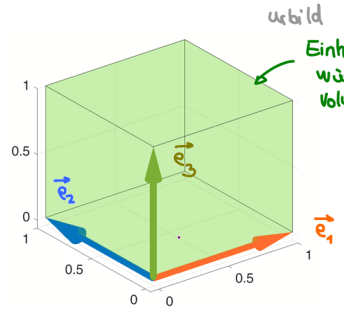
bekannt: $\det(A) = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -3$ ← Übergang zum Linkssystem
↑ vgl. Flächeninhalt ⊛

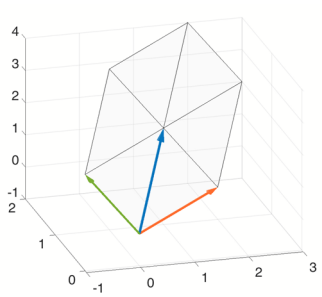
für $n=2$ gilt:
- $|\det(A)|$ = Flächeninhalt des von den beiden Spalten von A aufgespannten Parallelogramms
- $\det(A) > 0 \Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ein Rechtssystem
  $\det(A) < 0 \Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ein Linkssystem
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ Spalten von A sind kollinear

Dr. rer. nat. M. Striebel

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 0$

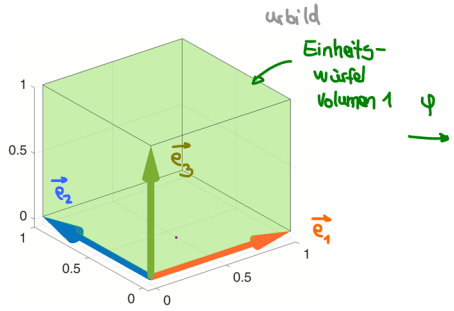


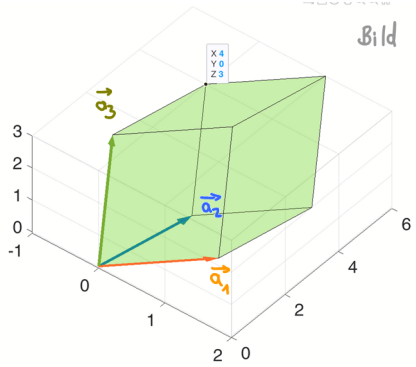


$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bilden ein Rechtssystem

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind l.a., sind komplanar spannen kein Parallelepiped auf

iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\text{rang}(A) = 3$ und $\det(A) = +11$





$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bilden ein Rechtssystem

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bilden Rechtssystem und ein Parallelepiped mit Volumen 11

Für $n = 3$ gilt: • $|\det(A)|$ = Volumen des von den Spalten von A aufgespannten Parallelepipeds

- $\det(A) > 0 \Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ein Rechtssystem
  $\det(A) < 0 \Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ein Linkssystem
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ Spalten von A sind komplanar.

Dr. rer. nat. M. Striebel