Rechenregeln für Determinanten

▶ 1

Satz (Rechenregeln für Determinanten)

Für quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

i.) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
ii.) $\det(A^T) = \det(A)$
iii.) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) < n$
iv.) Die Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten in A führt zu einem Vorzeichenwechsel in $\det(A)$.
v.) Die Addition des Vielfachen einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte ändert den Wert der Determinante nicht.
vi.) Ist $\hat{A}$ die Matrix, die aus der Matrix A durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit λ hervorgeht, so ist $\det(\hat{A}) = \lambda \cdot \det(A)$
vii.) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

} Auswirkungen elementarer Zeilenumformungen auf die Determinante

Beispiel zu i)

es ist $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -3$

und $\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} = 70$

mit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -15 \\ 3 & -4 & 0 \\ 10 & 3 & -15 \end{pmatrix}$

ist $\det(C) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} = -3 \cdot 70 = -210$

es ergibt sich auch via Laplacescher Entwicklung $\det\begin{pmatrix} 11 & -3 & -15 \\ 3 & -4 & 0 \\ 10 & 3 & -15 \end{pmatrix} = -210$

Beispiele zu iv)-vii.)

Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ist $\det(A) = 15$

zu iv) zugrundeliegende EZU: Vertauschung zweier Zeilen ▶ 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} =: A_1$

verursacht durch Zeilentausch

daher gilt: $\det(A_1) = -1 \cdot \det(A) = -1 \cdot 15 = -15$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =: A_2$$

daher gilt: $\det(A_2) = \underbrace{-1}_{\text{verursacht durch Zeilentausch}} \cdot \det(A_1) = -1 \cdot (-15) = 15$

$= -1 \cdot (-1) \cdot \det(A) = (-1)^2 \cdot \det(A)$

Übergang von A zu A_2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A_2$$

daher: $\det(A_2) = (-1)^{2} \cdot \det(A) = 1 \cdot 15 = 15$

und weiter:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =: A_3$$

somit $\det(A_3) = (-1)^{4} \det(A) = 1 \cdot 15 = 15$

zu v.) zugrundeliegende EZU:

Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

▶ 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \rfloor \cdot (-5) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -11 & -16 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} =: A_4$$

dann gilt nach v.) $\det(A_4) = \det(A) = 15$

Dr. rer. nat. M. Striebel

zu vi) zugrundeliegende EZU: Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl

▶ 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot \frac{1}{4} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

dann gilt nach vi): $\det(\hat{A}) = \frac{1}{4} \cdot \det(A) = \frac{1}{4} \cdot 15 = \frac{15}{4}$

⚠ Multiplikation mehrerer Zeilen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot (-3) \\ \\ \\ \cdot 1/7 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 & -12 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1/7 & 1 & 4/7 & 6/7 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

dann gilt nach vi) $\det(\tilde{A}) = (-3) \cdot \frac{1}{7} \cdot \det(A) = \frac{-3}{7} \cdot 15 = \frac{-45}{7}$

⚠ Multiplikation aller Zeilen mit demselben Wert

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot 2 \\ | \cdot 2 \\ | \cdot 2 \\ | \cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 8 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 14 & 8 & 12 \end{pmatrix} =: \tilde{A}_2 = 2 \cdot A$$

via vii)

dann gilt nach vi)

$$\det(\tilde{A}_2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \det(A) = 2^4 \cdot \det(A) = 2^4 \cdot 15 = 16 \cdot 15 = 240$$

„Gesamtbeispiel" - Sinnvoller Nutzen von iv, v, vi

▶ 5

gesucht: $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot 1/3 \\ \\ \end{matrix}^{vi} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{iv} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Big]^{-1}$$

← keine Auswirkung auf Determinante (v.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: B$$

← rechts obere Dreiecksmatrix

⇒ Determinante einfach zu bestimmen: $\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$

nach den Rechenregeln gilt:

$$\det(B) = (-1)^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \det(A) = 2$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

d.h. $\det(A) = \dfrac{\det(B)}{(-1)^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \det(B) = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = -12$

somit $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -12$

Strategie war:
- Überführung von A mittels EZUen in Dreiecksmatrix
- Determinante der Dreiecksmatrix einfach bestimmbar
- Mittels Rechenregeln „umgekehrt" schließen auf $\det(A)$

⚠ Vorsicht bei „Multiplikation einer Zeile" (besser darauf verzichten)

ohne Multiplikation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\cdot(-3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = C \leftarrow \text{Zeilenstufenform}$$

somit $\det(C) = 1 \cdot 2 \cdot (-6) = -12$

nach Rechenregeln gilt:

$\det(C) = (-1)^2 \cdot \det(A) \Rightarrow \det(A) = (-1)^2 \cdot \det(C) = 1 \cdot (-12) = -12$

Wird generell auf „Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl" verzichtet ergibt sich

Determinantenberechnung nach Gauß-Algorithmus

▶ 6

Satz (Berechnung einer Determinante nach dem Gauß-Algorithmus)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix.

Am Ende der Vorwärtselimination im Gauß-Algorithmus steht eine obere Dreiecksmatrix $R = (r_{i,j})$ die aus der Ursprungsmatrix A durch Zeilenvertauschungen und Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen entstanden ist.

Es ist dann

$$\det(A) = (-1)^\lambda \cdot \det(R) = (-1)^\lambda \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{i,i}$$

wobei λ die Anzahl der Zeilenvertauschungen während des Eliminationsschrittes ist.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 10 & -2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 7 \\ -1 & -4 & -3 & -5 & -6 \\ 5 & 16 & 5 & 17 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Konsequenz: ▶ 7

Punkt iii) der Rechenregeln : $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) < n$ (wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

ausführlicher:

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) < n \Leftrightarrow \dim(\operatorname{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)) < n \Leftrightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ l.a.

($\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sind die Spalten von A)

$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ nicht eindeutig lösbar. ($\vec{0} \in \mathbb{R}^n$)

Man unterscheidet zwischen sog. „regulären" und „singulären" quadratischen Matrizen:

Definition (reguläre und singuläre Matrix) ▶ 8

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix.

Falls $\det(A) \neq 0$, so heißt die Matrix A *regulär* und ansonsten, d. h. falls $\det(A) = 0$, *singulär*.

Bemerkungen:

i) „nicht regulär" $\hat{=}$ „singulär", „nicht singulär" $\hat{=}$ „regulär"

ii) A regulär $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n$

A singulär $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) < n$

iii) A regulär $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar

$\Leftrightarrow$ A ist invertierbar, d.h. A^{-1} existiert

damit ist $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Der Vollständigkeit wegen sei erwähnt, wie man mit der Determinante eindeutig lösbare LGS „direkt" lösen kann:

Satz (Cramersche Regel)

Es sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein LGS mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ seien die Spalten von A und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ die rechte Seite.

Ist A regulär, so ergeben sich die Komponenten x_i $(i = 1, \ldots, n)$ der eindeutigen Lösung $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ zu:

$$x_i = \frac{\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)}{\det(A)} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

Beispiel:

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ & $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ gilt $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}$

mit $\det(A) = 10$ (d.h. A regulär)

ist $x_1 = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \dfrac{10}{10} = 1$

$x_2 = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \dfrac{-10}{10} = -1$

$x_3 = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \dfrac{20}{10} = 2$

d.h. $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

⚠ Cramersche Regel ist in der Anwendung sehr rechenintensiv, d.h. nicht zu empfehlen.
Sie ist für theoretische Zwecke geeignet.

Dr. rer. nat. M. Striebel