Satz (Multiplikationssatz)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Fur $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ \dots \ \cdot P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Beispiele:

i) statistische Qualitätskontrolle

In einem Behälter mit 10 Teilen befinden sich 2 defekte Teile

Gesucht: W., beim 3 maligen hintereinander Herausnehmen und Prüfen eines Teils alle 2 defekten Teile zu finden.

Es bezeichne:

D_i = Ziehen eines defekten Teils bei i.ter Ziehung

F_i = Ziehen eines funktionsfähigen Teils bei i.ter Entnahme

A = Ziehen von 2 defekten Teilen bei 3 Ziehungen

Damit:

$$A = (D_1 \cap D_2 \cap F_3) \cup (D_1 \cap F_2 \cap D_3) \cup (F_1 \cap D_2 \cap D_3)$$

d.h. $P(A) = P(\underbrace{(D_1 \cap D_2 \cap F_3)} \cup \underbrace{(D_1 \cap F_2 \cap D_3)} \cup \underbrace{(F_1 \cap D_2 \cap D_3)})$

disjunkte Ereignisse

$$= P(D_1 \cap D_2 \cap F_3) + P(D_1 \cap F_2 \cap D_3) + P(F_1 \cap D_2 \cap D_3)$$

mit Multiplikationssatz:

In einem Behälter mit 10 Teilen befinden sich 2 defekte Teile

$$P(D_1 \cap D_2 \cap F_3) = P(D_1) \cdot P(D_2 \mid D_1) \cdot P(F_3 \mid D_1 \cap D_2)$$
$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{1}{45}$$

$$P(D_1 \cap F_2 \cap D_3) = P(D_1) \cdot P(F_2 \mid D_1) \cdot P(D_3 \mid D_1 \cap F_2)$$
$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{45}$$

$$P(F_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(F_1) \cdot P(D_2 \mid F_1) \cdot P(D_3 \mid F_1 \cap D_2)$$
$$= \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{45}$$

Damit $P(A) = \frac{1}{45} + \frac{1}{45} + \frac{1}{45} = \frac{3}{45} = \underline{\underline{\frac{1}{15}}}$

ii) Skatspiel:

(3 Spieler, je Spieler 10 Karten, 4 „Farben": Karo, Herz, Pik, Kreuz, je 1 Ass pro Farbe)

Gesucht: W. dafür, dass jeder Spieler genau ein Ass erhält.

Vorgehen: · Spieler 1 erhält 10 Karten, Spieler 2 erhält 10 Karten, Spieler 3 erhält 10 Karten, 2 Karten bleiben als Rest

Ereignisse: A_i = Spieler i erhält genau ein Ass $(i = 1,2,3)$

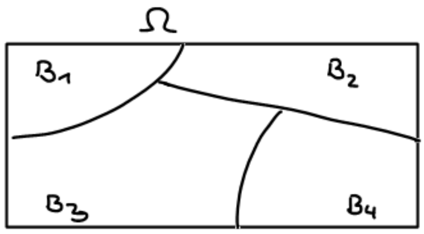
somit gesucht: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \underset{\text{Multiplikations-satz}}{=} P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$

mit $P(A_1) = \dfrac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{9}}{\binom{32}{10}}$

$P(A_2 \mid A_1) = \dfrac{\binom{3}{1} \cdot \binom{19}{9}}{\binom{22}{10}}$ mit matlab: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \approx 0{,}05562$

$P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \dfrac{\binom{2}{1} \cdot \binom{10}{9}}{\binom{12}{10}}$

3.) Totale Wahrscheinlichkeit



Definition (Vollständiges Ereignissystem, Zerlegung)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Eine Menge $\{B_1, \dots, B_n\}$ von Ereignissen $B_k \subseteq \Omega$ heißt vollständiges Ereignissystem (oder Zerlegung von Ω) falls gilt:

i) $B_j \cap B_k = \emptyset$ für $j \neq k$, d.h. B_j, B_k sind disjunkt

ii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega \quad \left(= \bigcup_{k=1}^{n} B_k \right)$

Beispiele:

i) Würfeln: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$, $B_3 = \{6\}$ bilden eine Zerlegung von Ω.

ii) $A, \bar{A}$ bilden eine Zerlegung

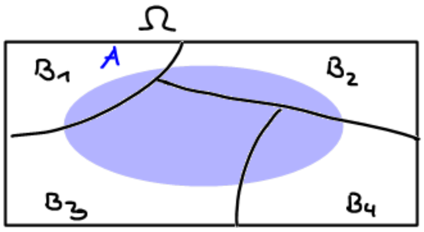
Satz (totale Wahrscheinlichkeit)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ eine Zerlegung von Ω.

Dann gilt $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)$$

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit



Nachweis: $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \dots \cup (A \cap B_n))$

disjunkt

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

$$\underset{\text{Multiplikations-satz}}{=} P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A \mid B_n) \qquad \#$$

Frage: Kann man aus $P(A \mid B)$ auf $P(B \mid A)$ schließen?

- $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) \Rightarrow P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

  $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

  $\Downarrow$

  $$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$$

- $\{B_1, \dots, B_n\}$ vollständiges Ereignissystem:

  $$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{P(A)} \underset{\substack{\text{totale} \\ \text{Wahrscheinlichkeit}}}{=} \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}$$

Satz (Satz von Bayes)

Sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum

i) Für $A, B \in \Sigma$ mit $P(A) \neq 0$ gilt:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$$

ii) Ist $\{B_1, \dots, B_n\}$ ein vollständiges Ereignissystem

Dann gilt:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}$$

Beispiele

i) technische Fehlerdiagnose

▶ 7

sei F Fehlerart, die in 10% aller Bauteile auftritt und M ein Merkmal mit dem F diagnostiziert wird:

abgeleitetes Diagnoseverfahren:

$M \rightsquigarrow F, \quad \bar{M} \rightsquigarrow \bar{F}$

mögliche Fehlentscheidungen

- M tritt nicht auf, Fehler dennoch vorhanden: $\bar{M}$ aber F
- M tritt auf, Gerät aber fehlerfrei: M aber $\bar{F}$

Gesucht: Irrtumswahrscheinlichkeiten: $P(F \mid \bar{M})$ und $\underline{P(\bar{F} \mid M)}$

↳ Übungsaufgabe

Gegeben:
- $P(F) = 0{,}1$
- in 80% der fehlerhaften Bauteile wird das Merkmal M beobachtet

  $P(M \mid F) = 0{,}8$
- in 30% der fehlerfreien Bauteile wird das Merkmal M beobachtet

  $P(M \mid \bar{F}) = 0{,}3$

$$P(F \mid \bar{M}) \underset{\uparrow}{=} \frac{P(F) \cdot P(\bar{M} \mid F)}{P(\bar{M})} \underset{\uparrow}{=} \frac{P(F) \cdot (1 - P(M \mid F))}{P(\bar{M})}$$

Satz von Bayes (a.))

$P(\cdot \mid F)$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß

$\ulcorner$ NR: $P(\bar{M}) = 1 - P(M)$

mit $P(M) \underset{\uparrow}{=} P(F) \cdot P(M \mid F) + P(\bar{F}) \cdot P(M \mid \bar{F})$

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$F, \bar{F}$ vollständiges Ereignissystem

$\Rightarrow P(\bar{M}) = 1 - (P(F) \cdot P(M \mid F) + P(\bar{F}) \cdot P(M \mid \bar{F}))$ $\lrcorner$

$$\text{damit } P(F \mid \bar{M}) = \frac{P(F) \cdot (1 - P(M \mid F))}{1 - (P(F) \cdot P(M \mid F) + P(\bar{F}) \cdot P(M \mid \bar{F}))}$$

$$= \frac{P(F)\,(1 - P(M \mid F))}{1 - (P(F) \cdot P(M \mid F) + (1 - P(F)) \cdot P(M \mid \bar{F}))}$$

$$= \frac{0{,}1\,(1 - 0{,}8)}{1 - (0{,}1 \cdot 0{,}8 + (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}3)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{1 - (0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}3)}$$

$$= \frac{0{,}02}{1 - (0{,}08 + 0{,}27)} = \frac{0{,}02}{1 - 0{,}35} = \frac{0{,}02}{0{,}65} \approx 0{,}031$$

d.h. in 3% aller Fälle wird ein defektes Gerät als fehlerfrei eingestuft.

ii.) Krankheits – Erkennung

8

Es sei bekannt, dass ca. 0,5 % der Bevölkerung an einer speziellen Krankheit leide. Ein Test führt bei 99 % der Erkrankten zu einem positiven Ergebnis, aber auch bei 2 % der Gesunden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der der Test eine Erkrankung anzeigt, wirklich erkrankt ist?

Ereignisse (Ausgangspunkt: eine Person wurde ausgewählt)

- B : Person ist erkrankt $\Rightarrow$ $\bar{B}$: Person ist nicht erkrankt

d.h. $P(B) = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}005$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0{,}995$

- A : Test liefert ein positives Ergebnis $\Rightarrow$ $\bar{A}$: Test liefert ein negatives Ergebnis

$P(A \mid B) = \frac{99}{100} = 0{,}99$

$P(A \mid \bar{B}) = \frac{2}{100} = 0{,}02$

gesucht: $P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$

Satz von Bayes

NR: $P(A) = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\bar{B}) \cdot P(A \mid \bar{B})$

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit (Ereignissystem: $B, \bar{B}$)

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\bar{B}) \cdot P(A \mid \bar{B})} = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}99}{0{,}005 \cdot 0{,}99 + 0{,}995 \cdot 0{,}02} \approx 0{,}1992$$

$\mathrel{\hat{=}} 20\,\%$

Bedeutung: Nur 20 % der positiv getesteten Personen ist tatsächlich erkrankt.

Bedeutung / Anwendung:

1) indirekte Beobachtungen

- Anfangsannahme: Beobachtung der Ereignisse $B_1, \dots, B_n$ schwierig aber $P(B_1), \dots, P(B_n)$ ungefähr bekannt (a-priori-Wahrscheinlichkeiten)

- Versuchsdurchführung liefere erkennbares Ereignis A

- mit dieser Information schätze man ab, welches Ereignis B_k zugrunde liegt

  $P(B_k \mid A)$ heißen dann a-posteriori Wahrscheinlichkeiten

2.) Irrtumswahrscheinlichkeit

Inwiefern kann eine Beobachtung A zur Entscheidung, ob ein Ereignis B_k eingetreten ist, herangezogen werden?

Nimmt man bei Beobachtung A das Eintreffen von B_k an, dann wird $P(B_i \mid A)$ für $i \neq k$ als Irrtumswahrscheinlichkeit interpretiert