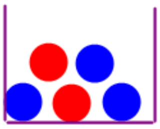
4.) stochastische Unabhängigkeit

Beobachtung – Beispiel



Ziehen von Kugeln aus der Urne mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Ereignisse: A : zweite Kugel blau

B : erste Kugel rot

Wegen „Zurücklegen" hat Ziehung der ersten Kugel keinen Einfluss auf Ziehen der zweiten Kugel, d.h. A hängt nicht vom Ereignis B ab.

Man kann zeigen: $P(A|B) = P(A)$ (⇝ Übungsaufgabe)

Man nennt A und B stochastisch unabhängige Ereignisse

Es ist $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Falls gilt: $P(A|B) = P(A)$ dann gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definition (stochastisch unabhängige Ereignisse)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bemerkungen

- Für $P(B) \neq 0$ ist $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gleichbedeutend mit

  $$P(A|B) = P(A)$$

  was eine andere gebräuchliche Definition der stochastischen Unabhängigkeit darstellt.

- stochastisch unabhängig bedeutet:

  Zwei Ereignisse haben keinen Einfluss aufeinander, d.h. tritt B ein so ändert das nichts an der Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt.

- Unabhängigkeit ist „symmetrisch":

  Wenn A unabhängig von B, dann ist auch B unabhängig von A

- Sind A, B stochastisch unabhängig, dann gilt:

  i) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

  ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$

  iii) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

  iv) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$

Beispiele:

a) Würfeln mit einem idealen Würfel

$A =$ „gerade Augenzahl", $B =$ „Augenzahl ≥ 4"

Frage: sind A und B stochastisch unabhängig

Antwort: mit $A = \{2,4,6\}$, $B = \{4,5,6\}$ ist $A \cap B = \{4,6\}$

damit:
- $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\neq$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ d.h. A & B sind <u>nicht</u> stochastisch unabhängig

(alternativ: $P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = P(A)$

$\Rightarrow$ A & B sind <u>nicht</u> stochastisch unabhängig)

b) zweimaliges Würfeln mit einem idealen Würfel

$A =$ „Summe der Augenzahlen ist gerade"

$B =$ „zweite Augenzahl ist gerade"

Frage: sind A und B stochastisch unabhängig

Antwort:

mit $G_i =$ „gerade Augenzahl im i-ten Wurf"

$U_i =$ „ungerade Augenzahl im i-ten Wurf"

ist $\Omega = \{(G_1, G_2), (G_1, U_2), (U_1, G_2), (U_1, U_2)\} \Rightarrow |\Omega| = 4$

$A = \{(G_1, G_2), (U_1, U_2)\} \Rightarrow |A| = 2$

$B = \{(G_1, G_2), (U_1, G_2)\} \Rightarrow |B| = 2$

$A \cap B = \{(G_1, G_2)\} \Rightarrow |A \cap B| = 1$

somit $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$=$

und $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Da $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt, sind A und B stochastisch unabhängig.

c.) zweimaliges Würfeln mit einem idealen Würfel

A = Summe der Augenzahlen ist 6 B = Summe der Augenzahlen ist 7

C = im ersten Wurf Augenzahl 5

Fragen: 1.) A & C stochastisch unabhängig?
2.) B & C — " —

Antwort:

Mengenorientierte Beschreibung:

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \Rightarrow |A| = 5$$

$$B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \Rightarrow |B| = 6$$

$$C = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\} \Rightarrow |C| = 6$$

$$A \cap C = \{(5,1)\} \Rightarrow |A \cap C| = 1$$

$$B \cap C = \{(5,2)\} \Rightarrow |B \cap C| = 1$$

$$\Omega = \{(i,j) \mid i = 1,\dots,6;\ j = 1,\dots,6\} \Rightarrow |\Omega| = 36$$

Wahrscheinlichkeiten (Laplace-Experiment)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}, \quad P(B \cap C) = \frac{|B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$$

zu 1.) $P(A) \cdot P(C) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36} = P(A \cap C)$

d.h. A & C sind <u>nicht</u> stochastisch unabhängig

zu 2.) $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \frac{1}{36} = P(B \cap C)$

d.h. B & C sind stochastisch unabhängig

d.h. „stochastisch unabhängig" hängt nicht nur vom Zufallsexperiment ab, sondern in erster Linie von der Fragestellung

Definition (stochastische Unabhängigkeit – Verallgemeinerung)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ heißen stochastisch unabhängig, falls für jede beliebige Auswahl von $k \leq n$ Ereignissen $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ $(i_j \in \{1, \ldots, n\})$ gilt

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Bemerkung:

stochastische Unabhängigkeit ist nicht paarweise definiert (d.h. $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$) und auch nicht über $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$ – beides muss erfüllt sein aber noch mehr

Beispiel Drehung eines Glücksrades – einmalig

Ereignisse: $A_1 = \{R, G\}$

$A_2 = \{R, B\}$

$A_3 = \{R, Ge\}$

Frage: A_1, A_2, A_3 stochastisch unabhängig?

Antwort: $P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$

gleichzeitige Ereignisse:

$A_1 \cap A_2 = \{R\} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$A_1 \cap A_3 = \{R\} \Rightarrow P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$A_2 \cap A_3 = \{R\} \Rightarrow P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

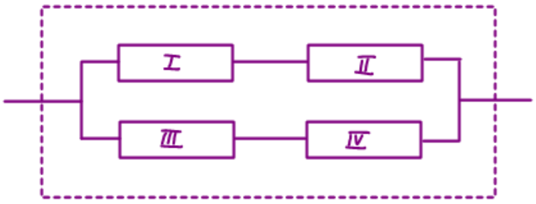
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{R\} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

A_1, A_2, A_3 nicht stochastisch unabhängig (aber: paarweise stochastisch unabhängig)

Beispiele

i) Ausfallwahrscheinlichkeit eines Gerätes

Gegeben sei ein Gerät bestehend aus 4 Bauteilen I, II, III, IV



Ereignisse:

G = „Gerät ist funktionsfähig"

E_i = „Bauteil i ist in Ordnung" $(i = 1,..,4)$

Grundannahmen:

i) alle Bauteile fallen unabhängig voneinander mit identischer Wahrscheinlichkeit aus:

$$P(\overline{E_i}) = p \quad \text{für ein } p \in [0,1]$$

ii) Eine Reihe funktioniert, wenn alle Bauteile der Reihe funktionieren

iii) Das Gerät funktioniert, wenn mindestens eine Reihe funktioniert

Fragen:

a) Wie groß ist p wenn $P(\overline{G})$ bekannt ist?

b) Wie groß darf p höchstens sein, damit $P(\overline{G}) \leq 0{,}1$

Lösung:

Hilfsereignisse: R_i = „Reihe i funktioniert"

damit
$$R_1 = E_1 \cap E_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{R_1} = \overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$
$$R_2 = E_3 \cap E_4 \quad \Rightarrow \quad \overline{R_2} = \overline{E_3 \cap E_4} = \overline{E_3} \cup \overline{E_4}$$
$$G = R_1 \cup R_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{G} = \overline{R_1 \cup R_2} = \overline{R_1} \cap \overline{R_2}$$

zu a) Es ist
$$P(\overline{G}) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) \underset{\substack{\overline{R_1}, \overline{R_2} \\ \text{stochastisch} \\ \text{unabhängig}}}{=} P(\overline{R_1}) \cdot P(\overline{R_2})$$

$$= (1 - P(R_1)) \cdot (1 - P(R_2)) = (1 - P(E_1 \cap E_2))(1 - P(E_3 \cap E_4))$$

$$\underset{\substack{\overline{E_1},..,\overline{E_4} \\ \text{stochastisch} \\ \text{unabhängig} \\ \Rightarrow E_1,..,E_4 \\ \text{stoch. unab.}}}{=} (1 - P(E_1) \cdot P(E_2)) \cdot (1 - P(E_3) \cdot P(E_4))$$

$$\underset{\substack{P(\overline{E_i}) = p \\ \Rightarrow P(E_i) = 1-p}}{=} (1 - (1-p) \cdot (1-p)) \cdot (1 - (1-p) \cdot (1-p))$$

$$= (1 - (1-p)^2)^2 = (1 - (1 - 2p + p^2))^2$$

$$= (1 - 1 + 2p - p^2) = (p(2-p))^2$$

also $(p(2-p))^2 = \boxed{P(\bar{G})}$ ← $\in [0,1]$

$\Leftrightarrow \quad p(2-p) = \sqrt{P(\bar{G})} \quad \Leftrightarrow \quad 2p - p^2 = \sqrt{P(\bar{G})} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{p^2 - 2p + \sqrt{P(\bar{G})} = 0}$

nur sinnvoll $p \in [0,1]$

quadratische Gleichung

zwei Lösungen p_1, p_2

$$p_{1/2} = \frac{1}{2}\left(+2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot\sqrt{P(\bar{G})}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{4\cdot(1-\sqrt{P(\bar{G})})}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 \pm 2\cdot\sqrt{1-\sqrt{P(\bar{G})}}\right)$$
$$= 1 \pm \sqrt{1-\sqrt{P(\bar{G})}}$$

$$\underbrace{p_1 = 1 + \sqrt{1-\sqrt{P(\bar{G})}}}_{\text{i.A. } > 1 \text{ (nicht sinnvoll)}}, \quad \boxed{p_2 = 1 - \sqrt{1-\sqrt{P(\bar{G})}}}$$

somit ist $\underline{\underline{p = 1 - \sqrt{1-\sqrt{P(\bar{G})}}}}$ ← streng monoton steigend in $P(\bar{G})$

zu b) mit $P(\bar{G}) = 0{,}1$: $\quad p = 1 - \sqrt{1-\sqrt{0{,}1}} \approx 0{,}1731$

D.h. Ausfallwahrscheinlichkeit der Bauteile darf 17,31% nicht überschreiten damit das Gerät mit 90% Wahrscheinlichkeit funktioniert.

ii) n Personen beobachten eine Szene. ▶ 8

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person eine spezielle Gegebenheit in dieser Szene übersieht liege bei 0,15 (und sei für alle Personen gleich)

Frage: Wieviele unabhängige Beobachter sind nötig, damit die Gegebenheit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9 % erkannt wird.

Lösung:

Hilfsereignisse: A_i = „Person i übersieht das Ereignis" $(i = 1, \dots, n)$

E = „Gegebenheit wird erkannt"

Dann $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$

$$\underset{\substack{\text{unabh.}\\ \text{Beobachter}\\ \text{d.h. } A_1,\dots,A_n\\ \text{stochastisch}\\ \text{unabhängig}}}{=} 1 - P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n) = 1 - (0{,}15)^n$$

mit $P(E) \geq \frac{99{,}9}{100} = 0{,}999$

muss gelten: $1 - (0{,}15)^n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 0{,}001 \geq (0{,}15)^n \Leftrightarrow \ln(0{,}001) \geq n \cdot \ln(0{,}15) \quad |: \ln(0{,}15) \; (<0)$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}15)} \approx 3{,}64$$

D.h. es bedarf mindestens 4 Beobachtern