Trennung der Variablen (TdV)

Problemstellung:

$$y' = f(x)\cdot g(y) \quad \text{mit } f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

Die Schritte der TdV-Verfahrens sind:

I.) **stationäre Lösungen ?**:
jede Nullstelle w_s von g (d. h. $g(w_s)=0$) impliziert eine stationäre Lösung

$$y_{\text{stat}}(x) = w_s \;\forall x \quad \text{bzw. } y_{\text{stat}} \equiv w_s$$

II.) **separieren**:
alle Term die y enthalten werden auf die linke Seite gebracht, alle anderen auf die rechte:

$$y' = f(x)\cdot g(y) \;\Leftrightarrow\; \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

III.) **integrieren**: Man bestimme …

- … eine Stammfunktion $\tilde{G}(y)$ von $\frac{1}{g(y)}$, d. h. man integriert

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y$$

und wähle eine Stammfunktion aus

- … eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, d. h. man integriert

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

und wähle eine Stammfunktion aus

IV.) **Auflösen** der Gleichung

$$\tilde{G}(y(x)) = F(x) + C$$

nach $y(x)$ liefert die allgemeine Lösung der ODE. $C\in\mathbb{R}$ entsteht als kummulierte Integrationskonstante und stellte den freien Parameter der Differentialgleichung dar.

Beispiele

i) $y' = x\cdot y$

Typ: separierbare DGL mit $f(x) = x$, $g(y) = y$

Verfahren: TdV

I.) Stationäre Lösungen ?

gesucht: $w_S \in \mathbb{R}$ mit $g(w_S) = 0 \Leftrightarrow w_S = 0$

eine stationäre Lösung: $y_{Stat}(x) = 0 \quad \forall x$

II.) separieren:

$$y' = x\cdot y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = x$$

III.) integrieren:

- $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + K_1$: wähle $\tilde{G}(y) = \ln|y|$
- $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + K_2$: wähle $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

IV.) Auflösen:

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \forall x$$

ausführlich: Fallunterscheidung (bekannt $y(x) \neq 0 \;\forall x$)

1. Fall $y(x) > 0 \;\forall x \Rightarrow |y(x)| = y(x) \;\forall x$

damit $\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow \ln(y(x)) = \frac{1}{2}x^2 + C$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(y(x))} = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = e^C\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

z.B. $C=-2$: $y(x) = e^{-2}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$C = 10$: $y(x) = e^{10}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$C = 0$: $y(x) = e^{0}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$$\Leftrightarrow y(x) = D\cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{mit } D>0$$

2. Fall: $y(x) < 0 \;\forall x \Rightarrow |y(x)| = -y(x) \;\forall x$

damit $\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow \ln(-y(x)) = \frac{1}{2}x^2 + C$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(-y(x))} = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

$$\Leftrightarrow -y(x) = e^C\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = -e^C\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

z.B. $C=-2$: $y(x) = -e^{-2}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$C = 10$: $y(x) = -e^{10}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

$$\Leftrightarrow y(x) = D\cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{mit } D<0$$

Kurzform:

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow |y(x)| = e^C\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

d.h. $y(x) = \pm D\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ für $D>0$

d.h. mit stationärer Lösung:

$$y(x) = D\cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \forall D\in\mathbb{R}$$

alle Lösungen der Differentialgleichung:

alle Funktionen y für die gilt: $\exists D>0$: $y(x) = D\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

und alle Funktionen y für die gilt: $\exists D<0$: $y(x) = D\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

und die Funktion y für die gilt: $y(x) = 0 \;\forall x$

gleichbedeutend zu $y(x) = 0\cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \;\forall x$

d.h. alle Lösungen von $y' = x\cdot y$ folgen dem Muster: $y(x) = D\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ für ein festes $D\in\mathbb{R}$

d.h. allgemeine Lösung: $y(x) = D\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ für $D\in\mathbb{R}$ beliebig

ii) $y' + 5x^4 \cdot y^2 = 0$

▶ 2

Umformung in explizite Form:

$$y' = -5x^4 \cdot y^2$$

Typ: separierbare DGL mit $f(x) = -5x^4$, $g(y) = y^2$

Verfahren: TdV

I.) stationäre Lösungen?

gesucht $w_s \in \mathbb{R}$: $g(w_s) = 0 \Leftrightarrow w_s^2 = 0 \Leftrightarrow w_s = 0$

somit stationäre Lösung: $y_{stat}(x) = 0 \;\forall x$

II) separieren

$$y' = -5x^4 \cdot y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = -5x^4$$

III.) Integrieren:

- $\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2}\,dy = \frac{1}{-1} y^{-1} + k_1 = -\frac{1}{y} + k_1$ wähle $\tilde{G}(y) = -\frac{1}{y}$
- $\int -5x^4\,dx = -5 \cdot \frac{1}{5} x^5 + k_2 = -x^5 + k_2$ wähle $F(x) = -x^5$

IV.) Auflösen:

$$-\frac{1}{y(x)} = -x^5 + C \Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} = x^5 - C \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{x^5 - C}$$

alle Lösungen der DGL:

- $y(x) = 0 \quad \forall x$ singuläre Lösung
- $y(x) = \dfrac{1}{x^5 - C}$ für ein festes $C \in \mathbb{R}$

allgemeine Lösung

Trennung der Variablen (TdV)

Problemstellung:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \text{mit } f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Die Schritte der TdV-Verfahrens sind:

I.) **stationäre Lösungen ?**:
jede Nullstelle w_s von g (d. h. $g(w_s) = 0$) impliziert eine stationäre Lösung

$$y_{stat}(x) = w_s \;\forall x \quad \text{bzw. } y_{stat} \equiv w_s$$

II.) **separieren**:
alle Term die y enthalten werden auf die linke Seite gebracht, alle anderen auf die rechte:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

III.) **integrieren**: Man bestimme …

- … eine Stammfunktion $\tilde{G}(y)$ von $\frac{1}{g(y)}$, d. h. man integriert

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy$$

und wähle eine Stammfunktion aus

- … eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, d. h. man integriert

$$\int f(x)\,dx$$

und wähle eine Stammfunktion aus

IV.) **Auflösen** der Gleichung

$$\tilde{G}(y(x)) = F(x) + C$$

nach $y(x)$ liefert die allgemeine Lösung der ODE. $C \in \mathbb{R}$ entsteht als kummulierte Integrationskonstante und stellte den freien Parameter der Differentialgleichung dar.

Zusatz: AWP: $\begin{cases} y' = -5x^4 \cdot y^2 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

$\rightarrow$ allgemeine Lösung: $y(x) = \frac{1}{x^5 - C}$

$\rightarrow$ Bestimmung von C: $y(0) = \frac{1}{0 - C} = -\frac{1}{C} \overset{!}{=} -3 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}$

d.h. Lösung des AWP: $y(x) = \dfrac{1}{x^5 - \frac{1}{3}}$

Nachrechnen: · $y(0) = \dfrac{1}{0 - \frac{1}{3}} = -3$ ✓ Anfangswert erfüllt

· DGL erfüllt?

mit $y(x) = \dfrac{1}{x^5 - \frac{1}{3}}$ ist $y'(x) = -\left(x^5 - \frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 5 \cdot x^4 = -\dfrac{5 \cdot x^4}{\left(x^5 - \frac{1}{3}\right)^2}$

$= \left(x^5 - \frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow$ DGL erfüllt ✓

und $-5x^4 \cdot (y(x))^2 = -5x^4 \cdot \left(\dfrac{1}{x^5 - \frac{1}{3}}\right)^2 = -\dfrac{5x^4}{\left(x^5 - \frac{1}{3}\right)^2}$

d.h. $y(x)$ ist Lösung des AWPs

---

alternativ zur DGL-Lösung:

$$\frac{y'}{y^2} = -5x^4 \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{(y(x))^2} = -5x^4 \Leftrightarrow \int \frac{y'(x)}{(y(x))^2}\,dx = \int -5x^4\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int -5x^4\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -x^5 + C$$