inhomogene lineare DGL 1. Ordnung : $y' = a(x)\cdot y + b(x)$ mit $b \not\equiv 0$

▶ 1

allgemeine Lösung : $y(x) = \left(C + \int^x b(t)\cdot e^{-A(t)}\,dt \right) e^{A(x)}$ (Variation der Konstante)

mit :
- A ist eine Stammfunktion von a
- $\int^x b(t)\cdot e^{-A(t)}\,dt$ zu verstehen als : eine Stammfunktion von $b(x)\cdot e^{-A(x)}$

Beispiele :
- $y' = -\frac{y}{x} + x^2 + 3x + 2$ für $y(x) = \frac{C}{x} + \frac{1}{4}x^3 + x^2 + x$ (mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig)
- $y' = x^2 + \frac{1}{10}y$ für $y(x) = C\cdot e^{\frac{1}{10}x} - 10x^2 - 200x - 2000$ (mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig)

Struktur der allg. Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung

▶ 2

inhomogene DGL : $y' = a(x)\cdot y + b(x)$

allg. Lösung : $y(x) = \left(C + \int^x b(t) e^{-A(t)}dt \right)\cdot e^{A(x)}$

$$= \underbrace{C\cdot e^{A(x)}}_{\text{allg. Lösung der zugehörigen homogenen linearen DGL}} + \underbrace{\left(\int^x b(t) e^{-A(t)}dt \right)\cdot e^{A(x)}}_{\text{konkrete Funktion}}$$

konkrete Funktion

spezielle/partikuläre Lösung von $y' = a(x)\cdot y + b(x)$

zugehörige homogene DGL : $y' = a(x)\cdot y$

allg. Lösung : $y(x) = \boxed{C\cdot e^{A(x)}}$

Überprüfung

mit: $y_s(x) = \left(\int^x b(t)\cdot e^{-A(t)}\,dt \right)\cdot e^{A(x)}$

$= F(x)\cdot e^{A(x)}$ mit $F'(x) = b(x)\cdot e^{-A(x)}$

$y_s'(x) = F'(x)\cdot e^{A(x)} + F(x)\cdot A'(x)\cdot e^{A(x)}$

$= b(x)\cdot e^{-A(x)}\cdot e^{A(x)} + F(x)\cdot a(x)\cdot e^{A(x)}$

$= b(x) + a(x)\cdot \underbrace{F(x)\cdot e^{A(x)}}_{=y_s(x)} = a(x)\cdot y_s(x) + b(x)$

d.h. y_s löst die DGL ⊣

Satz (Lösungsstruktur einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung)

▶ 3

Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = a(x)\cdot y(x) + b(x).$$

Die zugehörige homogene lineare DGL $y'(x) = a(x)\cdot y(x)$ habe die allgemeine Lösung $y_{\text{a,hom}}(x)$. Zudem sei $y_{\text{s}}(x)$ **eine spezielle / partikuläre Lösung** der inhomogenen Differentialgleichung.

Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen lineare Differentialgleichung gegeben durch

$$y_{\text{a}}(x) = y_{\text{a,hom}}(x) + y_{\text{s}}(x).$$

Beispiel: (Lösung eines AWP basierend auf Lösung eines AWPs)

▶ 4

gegeben: $(AWP_1): \begin{cases} y' = \frac{1}{2}y + x \\ y(0) = -4 \end{cases}$ $\quad$ $(AWP_2): \begin{cases} y' = \frac{1}{2}y + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Aufgaben: i) man zeige: $y_1(x) = -2x-4$ löst AWP_1

ii) man bestimme die Lösung von AWP_2 basierend auf Lösung von AWP_1

zu i) $y_1(0) = -2\cdot 0 - 4 = -4$ ✓ AW erfüllt

$y_1'(x) = -2 = \frac{1}{2}y_1(x) + x = \frac{1}{2}(-2x-4) + x = -x-2+x = -2$ d.h. y_1 erfüllt die DGL

$\Rightarrow$ ja, y_1 ist die Lösung von AWP_1

ii) 1. Schritt: bestimme die allgemeine Lösung von $y' = \frac{1}{2}y + x$

2. Schritt: wähle die Lösung aus für die gilt $y(0) = 0$

zum 1. Schritt: · bekannt aus i): $y_1(x) = -2x-4$ löst die inhomogene lineare DGL $y' = \frac{1}{2}y + x$

· laut obigem Satz zu bestimmen:

allg. Lösung der zugehörigen homogenen DGL: $y' = \frac{1}{2}y$:

$$y_{a,hom}(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

somit $y_a(x) = C\cdot e^{\frac{1}{2}x} + (-2x-4) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 2x - 4$

zum 2. Schritt:

$y_a(0) = C\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} - 2\cdot 0 - 4 = C - 4 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow C = 4$

d.h. Lösung von AWP_2: $y_2(x) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2x - 4$

Bemerkung

▶ 5

ähnliche Lösungsstruktur bei LGS:

$A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ (mit $\vec{b} \neq \vec{0}$) und $\operatorname{rang}(A) = r$

allg. Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{ \vec{x} = \vec{a} + t_1\cdot\vec{u}_1 + t_2\cdot\vec{u}_2 + \ldots + t_{n-r}\cdot\vec{u}_{n-r} \mid t_1, \ldots, t_{n-r} \in \mathbb{R} \}$

spezielle Lösung mit $\vec{a}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^n$

es gilt: $A\vec{a} = \vec{b}$ d.h. $\vec{a}$ ist eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$

$A\cdot\vec{u}_k = \vec{0}$ (für $k = 1, \ldots, n-r$) d.h. $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-r}$ sind Lösungen von $A\vec{x} = \vec{0}$

genauer: $\operatorname{Kern}(A) = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} = t_1\cdot\vec{u}_1 + t_2\cdot\vec{u}_2 + \ldots + t_{n-r}\cdot\vec{u}_{n-r} \mid t_1, \ldots, t_{n-r} \in \mathbb{R}\}$

zudem gilt folgendes Superpositionsprinzip bei LGS:

$$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \;\&\; A\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \Rightarrow A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

Satz (Superpositionsprinzip bei linearen DGL 1. Ordnung)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

- $y_1 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der linearen DGL $y' = a(x) \cdot y + b_1(x)$, und
- $y_2 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der linearen DGL $y' = a(x) \cdot y + b_2(x)$,

d. h. die beiden Probleme unterscheiden sich nur im Störterm.

Dann ist

$$y_1 + y_2 : I \to \mathbb{R}, x \mapsto (y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot y + (b_1(x) + b_2(x))$$

▶ 6

Beispiel

gegeben: $y' = \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1}{x}$ mit spezieller Lösung: $y_1(x) = 2x - 1$

$y' = \frac{1}{x} \cdot y + x$ mit spezieller Lösung: $y_2(x) = 3x + x^2$

▶ 7

dann ist $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = 2x - 1 + 3x + x^2 = x^2 + 5x - 1$

eine spezielle Lösung von $y' = \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1}{x} + x$

bekannt: allg. Lösung von $y' = \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1}{x}$ ist $y_{a,1}(x) = C \cdot x - 1$

allg. Lösung von $y' = \frac{1}{x} \cdot y + x$ ist $y_{a,2}(x) = D \cdot x + x^2$

nach Superpositionsprinzip: allg. Lösung von $y' = \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1}{x} + x$ ist

$$y_a(x) = y_{a,1}(x) + y_{a,2}(x) = C \cdot x - 1 + D \cdot x + x^2$$

$$= \underbrace{(C+D)}_{=E} x - 1 + x^2 = E \cdot x - 1 + x^2 \quad (\text{mit } E \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$