Lineare Gleichungssysteme

▶ 1

Problemstellung: gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

gesucht: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ so dass $A\vec{x} = \vec{b}$

Lösungsansätze aus Mathematik 1:

- Gauß-Verfahren (Vorwärtselimination & Rückwärtssubstitution)
- via Matrix-Invertierung: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$
- Cramersche-Regel: $x_k = \dfrac{\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n)}{\det(A)}$ ($\vec{b}$ ersetzt k-Spalte von A)

Ziel in der Numerik:

- Untersuchung der Verfahren
- weitere Verfahren?

▶ 2

besonders günstige LGS-Formen

▶ 3

a) rechts obere Zeilenstufenform $U\vec{x} = \vec{b}$ mit $U = \begin{pmatrix} \nearrow & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \nearrow \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned}
u_{11} \cdot x_1 + u_{12} x_2 + \ldots + u_{1,n-1} x_{n-1} + u_{1,n} \cdot x_n &= b_1 \\
u_{22} x_2 + \cdots + u_{2,n-1} x_{n-1} + u_{2,n} \cdot x_n &= b_2 \\
\ddots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots \\
u_{n-1,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{n-1,n} \cdot x_n &= b_{n-1} \\
u_{n,n} \cdot x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Lösung via Rückwärtssubstitution

für $k = n, n-1, \ldots, 2, 1$:

$$x_k = \frac{1}{u_{k,k}} \left(b_k - \sum_{p=k+1}^{n} u_{k,p} \cdot x_p \right)$$

b) links untere Zeilenstufenform $L \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $L = \begin{pmatrix} \swarrow & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \swarrow \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned}
l_{11} x_1 &= b_1 \\
l_{21} x_1 + l_{22} x_2 &= b_2 \\
\vdots \quad \vdots \qquad \ddots &\vdots \\
l_{n-1,1} x_1 + l_{n-1,2} x_2 + \cdots + l_{n-1,n-1} x_{n-1} &= b_{n-1} \\
l_{n,1} \cdot x_1 + l_{n,2} \cdot x_2 + \ldots + l_{n,n-1} \cdot x_{n-1} + l_{n,n} \cdot x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Lösung via Vorwärtssubstitution:

für $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$

$$x_k = \frac{1}{l_{k,k}} \left(b_k - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p} \cdot x_p \right)$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Gauß-Verfahren

(I) Vorwärtselimination: Überführung eines LGS mittels elementarer Zeilenumformung (EZU) in rechts obere Zeilenstufenform

▶ 4

(II) Rückwärtssubstitution: Lösung eines LGS in rechts oberer Zeilenstufenform

zu (I) Prinzip der Vorwärtselimination

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}} \end{array}$$

Annahme: $a_{11} \neq 0$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{12} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{1n} & b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot b_1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & a_{m2}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{12} & \cdots & a_{mn}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{1n} & b_n-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot b_1 \end{array}\right)$$

$$=: \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \boxed{\tilde{a}_{22}} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_n \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} \\ \\ -\frac{\tilde{a}_{n2}}{\tilde{a}_{22}} \end{array}$$

Annahme: $\tilde{a}_{22} \neq 0$

$$\sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & \hat{b}_1 \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} & \hat{b}_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} & \hat{b}_n \end{array}\right)$$

EZU

← repräsentiert LGS in rechts oberer Zeilenstufenform

⚠ Beobachtung: Vorwärtselimination durch Systemmatrix gesteuert

▶ 5

Beispiel:

gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ -3 & -5 & -7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$=: A$

▶ 6

gesucht: Vorwärtselimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 7 \\ -3 & -5 & -7 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \textcircled{1} \\ \\ \textcircled{3} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \textcircled{-2} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \textcircled{-1} \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \textcircled{1} \\ \\ \end{array}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rfloor \cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

$=: U$

es sei $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -(-2) & -(-1) & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -(-2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Konstruiert den EZU folgend

man multipliziere $L \cdot U$

	$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ -3 & -5 & -7 & -3 \end{matrix}$

d.h. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{= L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{= U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ -3 & -5 & -7 & -3 \end{pmatrix}}_{= A}$

d.h. $A = L \cdot U$ (EZU: nur Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile)

LU-Zerlegung (LR-Zerlegung)

Ziel: bei gegebener Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestimme $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass ▶ 7

$$\boxed{A = L \cdot U}$$

mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$

Satz (Existenz der LU-Zerlegung)

Gilt für eine $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0$$ (d.h. alle Hauptminoren von A ungleich 0)

dann existiert die LU-Zerlegung von A

Dr. rer. nat. M. Striebel

Erzeugung der LU-Zerlegung

PSEUDOCODE: zur Bestimmung von $\ell_{k,p}$ (und U) (ohne Zeilentausch)

für $k = 1, \dots, n-1$ (Spalten-Durchlauf)

- falls $a_{k,k} = 0$: Abbruch LU-Zerlegung nicht existent
- für $p = k+1, \dots, n$ (Zeilen-Durchlauf)
  - setze $\ell_{p,k} := \dfrac{a_{p,k}}{a_{k,k}}$
  - setze $a_{p,k} := 0$
  - für $j = k+1, \dots, n$ (Spalten-Durchlauf)

    setze $a_{p,j} = a_{p,j} - \ell_{p,k} \cdot a_{k,j}$

Verfahren überschreibt A sukzessive mit U

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 3 & 9 & -4 & 8 \\ -3 & -4 & -1 & -14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{matrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: U$$

Dr. rer. nat. M. Striebel