Nutzen der LU-Zerlegung zur Lösung eines LGS

▶ 1

Ausgangspunkt: $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

A sei LU-zerlegbar mit $A = L \cdot U$ mit $L = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \blacktriangle & & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $U = \left(\begin{smallmatrix} & \blacktriangledown \\ 0 & \end{smallmatrix}\right)$

▶ 2

dann gilt: $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow L \cdot U \cdot \vec{x} = \vec{b} \underset{\vec{z} = U\cdot\vec{x}}{\Longleftrightarrow} \boxed{U\vec{x} = \vec{z}}$ mit $\boxed{L \cdot \vec{z} = \vec{b}}$

LGS Nr 2 für $\vec{x}$ — LGS Nr. 1 für $\vec{z}$

Vorgehen:
1.) Bestimmung von $\vec{z}$ aus $L\cdot\vec{z} = \vec{b}$ mittels Vorwärtssubstitution
2.) Bestimmung von $\vec{x}$ aus $U\vec{x} = \vec{z}$ mittels Rückwärtssubstitution

Beispiel

gesucht: $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ mit $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 3 & 9 & -4 & 8 \\ -3 & -4 & -1 & -14 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}$

▶ 3

bekannt: $A = L \cdot U$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Schritt 1: $L\cdot\vec{z} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$z_1 = 1$

$z_2 = 0 - 2\cdot z_1 = -2$

$z_3 = 3 - (3\cdot z_1 + 3\cdot z_2) = 3 - (3\cdot 1 + 3(-2)) = 3 - (3-6) = 3-3+6 = 6$

$z_4 = -14 - (-3z_1 + 2z_2 - 1\cdot z_3) = -14 - (-3.1 + 2\cdot(-2) - 1\cdot 6) = -14 - (-3-4-6)$
$= -14 - (-13) = -1$

$\Rightarrow \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schritt 2: $U\vec{x} = \vec{z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

damit $x_4 = \frac{1}{-1}(-1) = 1$

$x_3 = \frac{1}{2}(6 - 2x_4) = \frac{1}{2}(6-2) = 2$

$x_2 = \frac{1}{1}(-2 - (-1\cdot x_3 - 1\cdot x_4)) = -2 - (-2-1) = -2 - (-3) = -2+3 = 1$

$x_1 = \frac{1}{1}(1 - (2\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 3\cdot x_4)) = 1 - (2\cdot 1 - 2 + 3\cdot 1) = 1 - (2 - 2 + 3) = 1-3 = -2$

Rechenaufwand

▶ 4

gezählt werden :

Punktoperationen (Multiplikationen & Divisionen)

Strichoperationen (Addition & Subtraktion)

1.) Vorwärtssubstitution ($L \cdot \vec{x} = \vec{b}$)

für $k = 1, 2, .., n-1, n$

$$x_k = \frac{1}{\ell_{k,k}} \left(b_k - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{k,p} \cdot x_p \right)$$

1 Strichoperation

1 Punktoperation

1 Punktoperation

k-2 Strichoperationen

▶ 5

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + .. + z_{k-1}$$

k-2 Additionen

zur Bestimmung von x_k (mit $k \in \{1, .., n\}$)

Anzahl Punktoperationen : $1 + (k-1) \cdot 1 = 1 + k - 1 = k$

Anzahl Strichoperationen : $1 + k-2 = k-1$

insgesamt zur Bestimmung von $x_1, x_2, ..., x_n$:

Anzahl Punktoperationen : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \mathcal{O}(\frac{1}{2} n^2)$

Gaußsche Summenformel

Anzahl Strichoperationen : $\sum_{k=1}^{n} (k-1) = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n - n = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n = \mathcal{O}(\frac{1}{2} n^2)$

Spezialfall (im LU-Zerlegungskontext) : L normiert, d.h. $\ell_{kk} = 1 \quad \forall\, k = 1, .., n$

damit reduzierte Anzahl an Punktoperationen : $\frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$

2.) Rückwärtssubstitution ($U \vec{x} = \vec{b}$)

für $k = n, n-1, ..., 2, 1$:

$$x_k = \frac{1}{u_{k,k}} \left(b_k - \sum_{p=k+1}^{n} u_{k,p} \cdot x_p \right)$$

1 Strichoperation

1 Punktoperation

1 Punktoperation

n-k-1 Strichoperationen

▶ 6

$$z_{k+1} + z_{k+2} + \dots + z_n = z_{k+1} + z_{k+2} + \dots + z_{k+(n-k)}$$

$n = n + k - k$

$= k + (n-k)$

zur Bestimmung von x_k (mit $k \in \{1, .., n\}$)

Anzahl Punktoperationen : $1 + (n-k) \cdot 1 = 1 + n - k$

Anzahl Strichoperationen : $1 + n-k-1 = n-k$

insgesamt zur Bestimmung von $x_1, x_2, ..., x_n$:

Anzahl Punktoperationen : $\sum_{k=1}^{n} 1 + n - k = \left(\sum_{k=1}^{n} 1 \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} n \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) = n + n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = n + n^2 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$

$= \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \mathcal{O}(\frac{1}{2} n^2)$

Anzahl Strichoperationen : $\sum_{k=1}^{n} n-k = \sum_{k=1}^{n} n - \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) = n^2 - \left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \right) = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n = \mathcal{O}(\frac{1}{2} n^2)$

3.) LU-Zerlegung

▶ 7

```
für $k = 1, \dots, n-1$
    • für $p = k+1, \dots, n$
        • $\ell_{p,k} := \frac{a_{pk}}{a_{k,k}}$        ← 1 Punktoperation
        • für $j = k+1, \dots, n$
              $a_{pj} = a_{pj} - \ell_{pk} \cdot a_{kj}$
                          ↑ 1 Strichoperation    ↑ 1 Punktoperation
```

Anzahl Punktoperationen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{p=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n} 1\right)$$

Anzahl Strichoperationen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{p=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} 1$$

Es ergibt sich als Rechenaufwand

- $\frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{3} n$ Punktoperationen $\mathcal{O}\left(\frac{1}{3} n^3\right)$
- $\frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{3} n + \frac{1}{2}$ Strichoperationen $\mathcal{O}\left(\frac{1}{3} n^3\right)$

Zusammenfassung: Rechenaufwand (nur Punktoperationen)

▶ 8

- LU-Zerlegung: $\frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{3} n$
- Vorwärtssubstitution: $\frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$
- Rückwärtssubstitution: $\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$

} Lösung eines LGS bei vorliegender LU-Zerlegung: n^2 Punktoperationen notwendig

$\Rightarrow$ Gesamtaufwand zur Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\boxed{\frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{3} n + n^2} \text{ Punktoperationen}$$

Vergleich: klassisches Gauß-Verfahren

▶ 9

Ⓐ Vorwärtselimination – Aufwandsrechnung Punktoperationen

```
für $k = 1, 2, \dots, n-1$:
    • für $m = k+1, \dots, n$:
        • $\text{faktor} := -\frac{a_{m,k}}{a_{k,k}}$                1 Punktoperation
        • für $j = k+1, \dots, n$:
              $a_{mj} = a_{mj} + \text{faktor} \cdot a_{kj}$      1 Punktoperation
        • $b_m = b_m + \text{faktor} \cdot b_k$                 1 Punktoperation
```

\# Punktoperationen:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{n} \left(1 + \left(\sum_{j=k+1}^{n} 1\right) + 1\right) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 - \frac{5}{6} n$$

Ⓑ Rückwärtssubstitution

\# Punktoperationen $= \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$

⊜

Somit: Gesamtaufwand:

$$\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 - \frac{5}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \boxed{\frac{1}{3} n^3 + n^2 - \frac{1}{3} n \text{ Punktoperationen}}$$

Bemerkung Rechenaufwand des klassischen Gaußverfahrens = Rechenaufwand von LU-Zerlegung + Substitutionen

Aber: Häufig auftretender Fall (z.B. vereinfachtes Newton-Verfahren für nichtlineare Systeme):

löse $A\vec{x}_k = \vec{b}_k$ für unterschiedliche rechte Seiten $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \in \mathbb{R}^n$

und gleichbleibender Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

▶ 10

Aufwand

mit LU-Zerlegungsstrategie: 1 mal LU-Zerlegung: $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$

+ je rechte Seite: n^2

mit Gauß-Verfahren: je rechte Seite: $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$

?

Idee: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ via Matrixinverse $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Gauß-Jacobi-Algorithmus

$$A \,|\, E \xrightarrow{\text{EZU}} E \,|\, A^{-1}$$

▶ 11

1.) Bestimmung der Inversen:

mit $A^{-1} = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$:

$A \cdot A^{-1} = E_n \Leftrightarrow A(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n) = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$

$\Leftrightarrow A\vec{c}_1 = \vec{e}_1 \;\&\; A\vec{c}_2 = \vec{e}_2 \;\&\; \cdots \;\&\; A\vec{c}_n = \vec{e}_n$

n LGS mit gleicher Systemmatrix

& unterschiedlichen rechten Seiten

Aufwand: (1 × LU-Zerlegung + n × V-/R-Substitutionen):

$$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + n \cdot n^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$$

2) Matrix-Vektor-Multiplikation

mit $A^{-1} = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ & $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$

ist $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T = A^{-1} \cdot \vec{b}$

- für $k = 1, \ldots, n$:

$$x_k = \sum_{\ell=1}^{n} c_{k\ell} \cdot b_\ell$$

Aufwand (# Punktoperationen)

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} 1 = n^2$$

Gesamtaufwand:

$$\frac{4}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$$

Keine gute Idee!

Aufwandsabschätzungen: zur Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$

▶ 12

I.) klassisch via Gauß-Verfahren $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$

p rechte Seiten: $p \cdot \left(\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n\right)$

II.) LU-Zerlegung + Vorwärts- & Rückwärtssubstitution $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$

p rechte Seiten: $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + p \cdot n^2$

III.) via Matrix-Inverse: $\frac{4}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$

p rechte Seiten: $\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + p \cdot n^2$

d.h. Lösung via $A^{-1} \cdot b$ bedarf n^3 mehr Multiplikationen als die anderen Verfahren!

bereits bei n = 10 sind das 1000 operationen mehr!

Daher: Matrizen invertiert man nicht!