LU-Zerlegung: $A = L \cdot U$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

- existiert nicht immer (Bedingung: alle Hauptminoren von $A \neq 0$)
- praktische Bestimmung: Transformation von A mittels EZU (Addition des Vielfachen einer Zeile auf eine andere) in rechts obere Zeilenstufenform
  (Verfahren bricht bei Nicht-Existenz der LU-Zerlegung ab)

Was tun, wenn Zeilentausch notwendig?

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & -8 & 1 & 6 \\ 3 & -18 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Gauß-Verfahren:

1.) Vorwärtselimination:

LU-Zerlegung existiert nicht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -8 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & -18 & -3 & 9 & -9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & \boxed{0} & -5 & -2 & -7 \\ 0 & -6 & -12 & -3 & -21 \\ 0 & 6 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Zeilenvertauschung notwendig

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 6 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right) {+1} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -1 & -11 \end{array}\right) {-2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

2.) Rückwärtssubstitution:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. Lösbarkeit hat nichts mit der Existenz der LU-Zerlegung zu tun

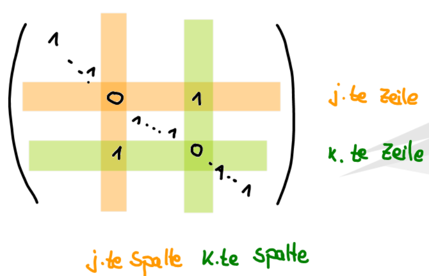
Schlüssel: Zeilenvertauschung dargestellt als Matrix-Produkt

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{von 2. \& 3. Zeile}]{\text{Vertauschung}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vertauschungsmatrix $P_{2,3}$ (spezielle Permutationsmatrix)

allgemein $P_{j,k} =$



ohne Beweis:

Satz (LU-Zerlegung mit Zeilentausch)

▶ 6

Zu jeder quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existieren

- eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$
  (Eigenschaften einer Permutationsmatrix:
  - jede Zeile und jede Spalte besteht aus genau einer 1, sonst 0
  - $P^T \cdot P = P \cdot P^T = E_n$, d.h. $P^{-1} = P^T$)
- eine normierte links untere Dreiecksmatrix $L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- eine rechts obere Dreiecksmatrix $U = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

so dass: $\boxed{P\cdot A = L \cdot U}$

Bemerkung: praktisch wird nicht P konstruiert sondern ein „Permutationsvektor" $\vec{p}$

▶ 7

Beispiel ▶ 8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & -8 & 1 & 6 \\ 3 & -18 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{matrix}$$

Permutationsvektor

$\vec{p} = (1, 2, 3, 4)$

2. Zeile der 4x4 Einheitsmatrix
(0 1 0 0)
(entsprechend für 1, 3, 4)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & & 1 & 0 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

▶ 9

$\vec{p} = (1, 3, 2, 4)$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 0 \\ +1 \end{matrix}$$

$\vec{p} = (1, 3, 4, 2)$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

▶ 10

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$= U$

interpretiert als

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▶ 11

$$L\cdot U = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -18 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & -8 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & -8 & 1 & 6 \\ 3 & -18 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = P\cdot A$$

▶ 12

Lösung eines LGS mittels LU-Zerlegung mit Zeilentausch

▶ 13

LGS: $A\vec{x} = \vec{b}$

bekannt: P, L, U so dass $P\cdot A = L\cdot U$

dann $A\vec{x} = \vec{b} \iff P\cdot A\cdot\vec{x} = \underbrace{P\cdot\vec{b}}_{=:\,\tilde{\vec{b}}} \iff L\cdot U\cdot\vec{x} = \tilde{\vec{b}} \iff U\vec{x} = \vec{z}$ mit $L\cdot\vec{z} = \tilde{\vec{b}}$

(Vertauschung der Koeffizienten von $\vec{b}$ gemäß P)

Beispiel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & -8 & 1 & 6 \\ 3 & -18 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

▶ 14

mit $P\cdot A = L\cdot U$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$, P codiert durch $(1,3,4,2)$

ist: $P\cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{\vec{b}}$

1) $\vec{z}$ aus $L\cdot\vec{z} = \tilde{\vec{b}}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $z_1 = 4$,

$z_2 = -9 - 12 = -21$,

$z_3 = 14 - 4 - 21 = -11$

$z_4 = 1 - 2\cdot 4 + \frac{11}{2} = \frac{11-14}{2} = -\frac{3}{2}$

d.h. $\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ -21 \\ -11 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

2.) $\vec{x}$ aus $U\cdot\vec{x} = \vec{z}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -21 \\ -11 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x_4 = -\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$

$x_3 = -\frac{1}{10}(-11 + 1) = 1$

$x_2 = -\frac{1}{6}(-21 + 12 + 3) = 1$

$x_1 = 4 + 4 - 3 - 4 = 1$

d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zeilentausch aus Genauigkeitsgründen (Problem: Rechnerarithmetik)

▶ 15

Beispiel: zu lösen: $\begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

▶ 16

exakte Rechnung $x_1 = -0{,}499975\ldots, \quad x_2 = 0{,}99995\ldots$

Rechnung in $\mathbb{G}(10,4)$

Variante 1 (ohne Zeilentausch)

1) Vorwärtselimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 2\cdot 10^{4} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & 20000 & 20000 \end{array}\right)$$

$fl(20000+1) = rd(20001) = 20000$

2.) Rückwärtssubstitution:

$$x_2 = \frac{20000}{20000} = 1 \Rightarrow x_1 = -10^{4}(1-1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Variante 2 (mit Zeilentausch)

1) Vorwärtselimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -10^{-4} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$fl(1 + \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}) = fl(1 + 0{,}00005) = rd(1{,}00005) = 1$

2.) Rückwärtssubstitution

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \tfrac{1}{2}(-1) = -0{,}5$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Strategie: $\boxed{\text{Wähle als Pivotelement stets das betragsmäßig größte Element in der betreffenden Spalte}}$

▶ 17

dies minimiert die Rundungsfehler.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \vec{p} = (1,2,3) \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

▶ 18

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} \end{matrix} \qquad \vec{p} = (3,2,1) \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 0 & 7/3 & 17/3 \\ 0 & 5/3 & 19/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{5}{7} \end{matrix} \qquad \vec{p} = (3,1,2) \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 0 & 7/3 & 17/3 \\ 0 & 0 & 16/7 \end{pmatrix} = U \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$