Iterative Verfahren zur LGS-Lösung

bisher: direkte Verfahren

- liefern exakte Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär & $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
  - ↑ rundungsfehler behaftet
- basieren auf Faktorisierung / multiplikative Zerlegung (z. B. beim LU-Verfahren: $A = L \cdot U$)
- benötigen $O(n^3)$ Rechenoperationen (u.U. reduzierbar bei Ausnutzung spezieller Strukturen)

Wunsch: Ergebnis mit deutlich weniger Rechenaufwand – realistisch: suche Näherungslösung statt exakter Lösung

Idee: Überführe $A\vec{x} = \vec{b}$ in passendes Fixpunktproblem: $\vec{x} = \Phi(\vec{x})$ & führe Fixpunktiteration durch

Konstruktion einer Fixpunktiteration

Ansatz: additive Zerlegung von A

mit $A = M + N$

Annahme: M regulär

ist $\underbrace{A\vec{x} = \vec{b}}_{\text{LGS}} \Leftrightarrow (M+N)\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow M\vec{x} = -N\vec{x} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = -M^{-1} \cdot N \cdot \vec{x} + M^{-1} \cdot \vec{b}$

Fixpunktproblem $\vec{x} = \Phi(\vec{x})$

mit $\Phi(\vec{x}) = -M^{-1} \cdot N \cdot \vec{x} + M^{-1} \cdot \vec{b}$

somit ergibt sich die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = -M^{-1} \cdot N \cdot x^{(k)} + M^{-1} \cdot b$$

bzw. $M \cdot x^{(k+1)} = -N \cdot x^{(k)} + b$ ⊛

bei Vorgabe eines Startwertes $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

im Weiteren: x bzw. b statt $\vec{x}$ bzw. $\vec{b}$ aus Lesbarkeitsgründen

Sinnvoll, wenn

1. Fixpunktiteration konvergiert und
2. M^{-1} sehr einfach bestimmbar bzw. LGS ⊛ billig zu lösen
   - ↑ insb. wenn M Diagonalmatrix
   - ↑ insb. wenn M Dreiecksmatrix

Dr. rer. nat. M. Striebel

zu ① : Konvergenz der Fixpunktiteration ▶ 7

aus Themenbereich „nichtlineare Gleichungen": Kernaussage zur Konvergenz: Banachscher Fixpunktsatz ▶ 8

betrachte Fixpunktproblem $x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) = B \cdot x - z$ mit $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $z \in \mathbb{R}^n$

▶ 9

Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ mit induzierter Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n \times n}$

i.) $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, d.h mit $I = \mathbb{R}^n$ ist $\Phi : I \to I$ eine Selbstabbildung ▶ 10

ii) für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\| \Phi(x) - \Phi(y) \| = \| (B \cdot x - z) - (B \cdot y - z) \| = \| B \cdot x - z - B \cdot y + z \|$$

$$= \| B \cdot x - B \cdot y \| = \| B \cdot (x - y) \| \underset{\uparrow}{\leq} \| B \| \cdot \| x - y \|$$ ▶ 11

induzierte Matrixnorm
d.h. verträglich

d.h. Φ ist Kontraktion genau dann, wenn $\| B \| < 1$

mit $B = -M^{-1} \cdot N$ folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz:

Satz (hinreichende Bedingung für die Konvergenz iterativer LGS-Verfahren) ▶ 12

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Es seien zudem $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bekannt, wobei M regulär ist und $A = M + N$ gilt.

Die Fixpunktiteration

$$\vec{x}^{(k+1)} = -M^{-1} \cdot N \cdot \vec{x}^{(k)} + M^{-1} \cdot \vec{b}$$

konvergiert dann für jeden Startwert $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen die exakte Lösung $\vec{x}^*$ des LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, falls für eine Matrixnorm $\| \cdot \|$ gilt:

$$\|M^{-1} \cdot N\| < 1$$

Bemerkungen: $\Phi(x) = B \cdot x - z$

i) notwendiges Kriterium: $\rho(B) < 1$ ← Spektralradius von B: $\rho(B) = \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ ist EW von } B \}$ $\rho \mathrel{\hat{=}}$ „Rho" ▶ 13

ii) Fehlerschätzungen (vgl. Banachscher Fixpunktsatz)

- a-priori: $\| x^{(k)} - x^* \| \leq \dfrac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \cdot \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$

- a-posteriori: $\| x^{(k)} - x^* \| \leq \dfrac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$

Dr. rer. nat.
M. Striebel