Zwei wichtige iterative Verfahren

(zu ②: günstige Wahl von M und N)

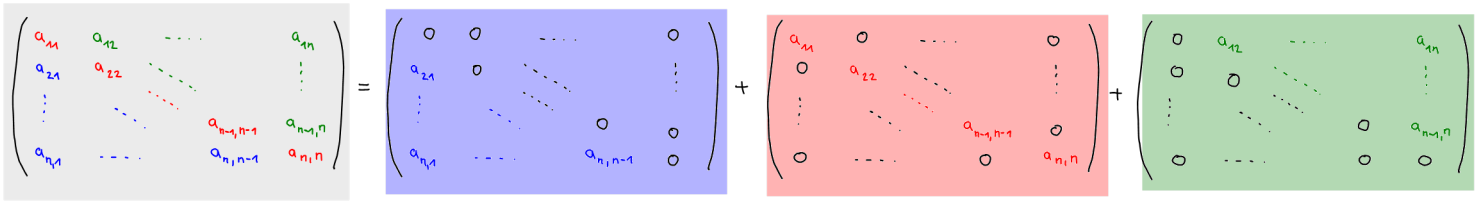
I.) Jacobi-Verfahren

II.) Gauß-Seidel-Verfahren

▶ 1

beide basieren der additiven Zerlegung

$$A = A_L + A_D + A_u \quad \text{mit} \quad A_L = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ * & \ddots & \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}, \; A_D = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}, \; A_u = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$



Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}}_{=: A_L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{=: A_D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= A_u}$$

in octave / matlab via
- tril
- triu
- diag

I.) Jacobi-Verfahren

$$A = M + N \quad \text{mit} \quad M = A_D, \; N = A_L + A_u$$

▶ 2

⚠ nur möglich, wenn $a_{ii} \neq 0 \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$
damit M regulär

somit Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = -A_D^{-1}(A_L + A_u)\, x^{(k)} + A_D^{-1} \cdot b$$

$$\text{mit} \quad M = A_D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{somit} \quad M^{-1} = A_D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$N = A_L + A_u = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} = A - A_D$$

elementweise betrachtet (ausgehend von ⊛)

▶ 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

äquivalent:

$$a_{jj} \cdot x_j^{(k+1)} = - \sum_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq j}}^{n} a_{j\ell} \cdot x_\ell^{(k)} + b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

somit ergibt sich die j-te Komponente $(j = 1,\dots,n)$ von $x^{(k+1)}$ durch

$$x_j^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} a_{j\ell} \cdot x_\ell^{(k)} + \frac{1}{a_{jj}} \cdot b_j$$

elementweise Formulierung des Jacobi-Verfahrens

↳ Beobachtung: Komponenten von $x^{(k+1)}$ können unabhängig voneinander bestimmt werden, d.h. sie könnten parallel berechnet werden

Beispiele (in Octave gezeigt)

i) mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 14 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ keine Konvergenz gegen exakte Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ▶ 4

ii) mit $A = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 11 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 18 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 15 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ 28 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ Konvergenz gegen exakte Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ▶ 5

Ziel: einfaches Kriterium für die Konvergenz des Jacobi-Verfahrens ▶ 6

im Sinne: wenn A das Kriterium erfüllt, dann konvergiert die Jacobi-Fixpunktiteration (hinreichend)

nicht: die Iteration konvergiert nur, wenn A das Kriterium erfüllt. (notwendig)

Hilfsmittel: hinreichende Bedingung für Konvergenz: $\| M^{-1} \cdot N \| < 1$ für eine induzierte Matrixnorm

i.) basierend auf der Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{\ell=1}^{n} |a_{j\ell}|$ ▶ 7

mit $M^{-1} \cdot N = A_D^{-1} (A_L + A_U) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\| M^{-1} \cdot N \|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} \frac{|a_{j\ell}|}{|a_{jj}|} = \max_{j=1,\dots,n} \left(\frac{1}{|a_{jj}|} \cdot \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} |a_{j\ell}| \right)$

damit ist $\| M^{-1} \cdot N \|_\infty < 1 \Leftrightarrow \max_{j=1,\dots,n} \left(\frac{1}{|a_{jj}|} \cdot \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} |a_{j\ell}| \right) < 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|a_{jj}|} \cdot \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} |a_{j\ell}| < 1 \quad \forall j = 1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow |a_{jj}| > \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} |a_{j\ell}| \quad \forall j = 1,\dots,n$$

in jeder Zeile muss gelten: Betrag des Diagonalelements muss größer sein als die Summe der Beträge aller anderen Elemente

Dr. rer. nat. M. Striebel

Man erhält somit mit

Definition (strikt / streng / stark diagonaldominant)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *strikt/streng/stark diagonaldominant*, wenn gilt

$$|a_{j,j}| > \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} |a_{j,l}| \quad \forall\, j = 1,\dots,n.$$

▶ 8

Satz (starkes Zeilensummen kriterium)

Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strikt diagonaldominant – man sagt, A erfüllt das *starke Zeilensummenkriterium* – dann konvergiert das zugehörige Jacobi-Verfahren.

d.h. A strikt diagonaldominant $\Rightarrow$ Jacobi-Verfahren konvergiert

Beispiele von oben:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|1| = 1 \not> 11 = |1|+|4|+|3|+|3|$

$\Rightarrow$ A ist nicht strikt diagonaldominant

$\Rightarrow$ A erfüllt nicht das starke Zeilensummenkriterium

⚠ es folgt daraus nicht, dass das Jacobi-Verfahren divergiert!

▶ 9

ii) $A = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 11 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 18 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 15 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$|13| = 13 > 11 = |1|+|4|+|3|+|3|$ ✓

$|11| = 11 > 9 = |1|+|3|+|3|+|2|$ ✓

$|18| = 18 > 16 = |5|+|5|+|5|+|1|$ ✓

$|15| = 15 > 13 = |5|+|1|+|2|+|5|$ ✓

$|7| = 7 > 5 = |1|+|1|+|2|+|1|$ ✓

somit A strikt diagonaldominant

▶ 10

$\Rightarrow$ A erfüllt das Zeilensummenkriterium

$\Rightarrow$ Jacobi-Verfahren konvergiert.

Weiteres Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 & -2 \\ 3 & -12 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & -15 & -5 \\ 1 & -2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$

$|9| = 9 \not> 10 = |-4|+|4|+|-2|$

somit: A nicht strikt dominant

$\Rightarrow$ starkes Zeilensummenkriterium gilt nicht

▶ 11

aber: Jacobi-Iteration mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 34 \\ 37 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ konvergiert

Dr. rer. nat. M. Striebel

ii.) basierend auf der Spaltensummennorm $\|A\|_1 = \max_{l=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{jl}|$

▶ 12

mit $\|M^{-1} \cdot N\|_1 = \max_{l=1,\dots,n} \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \frac{|a_{jl}|}{|a_{jj}|} \right) < 1$

erhält man

Satz (starkes Spaltensummenkriterium)

Erfüllt die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das *starke Spaltensummenkriterium*, d. h. gilt

$$|a_{l,l}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} |a_{j,l}| \quad \forall\, l = 1, \dots, n,$$

dann konvergiert das zugehörige Jacobi-Verfahren.

in jeder Spalte muss das Diagonalelement betragsmäßig größer sein als die Summe der Beträge der anderen Spaltenelemente

Begründung über Betrachtung von A^T & EW-Theorie

Beispiel:

▶ 13

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 & -2 \\ 3 & -12 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & -15 & -5 \\ 1 & -2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$|9| = 9 > 6 = |3| + |2| + |1|$

$|-12| = 12 > 10 = |-4| + |-4| + |-2|$

$|-15| = 15 > 14 = |4| + |-5| + |-5|$

$|12| = 12 > 7 = |-2| + |0| + |-5|$

A erfüllt das starke Spaltensummenkriterium

$\Rightarrow$ Jacobi-Verfahren konvergiert!

im Video: Anmerkungen zu a-priori & a-posteriori – Schätzungen

▶ 14

Dr. rer. nat. M. Striebel

Zusammenfassung:

▶ 15

JACOBI-Verfahren:

Es sei $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und $A = A_L + A_D + A_U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ eine reguläre Matrix.

Erfüllt A das

- strikte Zeilensummenkriterium $\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} |a_{j\ell}| < |a_{jj}| \quad \forall j = 1, \dots, n$,

  (d.h. ist strikt diagonaldominant), oder das

- strikte Spaltensummenkriterium $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{j\ell}| < |a_{\ell\ell}| \quad \forall \ell = 1, \dots, n$

so konvergiert die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = -A_D^{-1} \cdot (A_L + A_U)\, x^{(k)} + A_D^{-1} \cdot \vec{b}$$

für jeden Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen die exakte Lösung x^* des LGS $Ax = \vec{b}$

Bemerkungen:

i) Jacobi-Iteration wird auch Gesamtschritt-Verfahren genannt.

ii) Implementierung für gewöhnlich komponentenweise:

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j\ell}\, x_\ell^{(k)} - \sum_{\ell=j+1}^{n} a_{j\ell}\, x_\ell^{(k)} \right)$$

parallelisierbar

Anzahl Punktoperationen pro Iteration

$$n \left(1 + \sum_{\ell=1}^{j-1} 1 + \sum_{\ell=j+1}^{n} 1 \right) = n\,(1 + n - 1) = n^2$$

(Vgl. Gauß-Verfahren: $\mathcal{O}(n^3)$ zur exakten Lösung)

iii) Abbruchkriterium: $\| A x^{(k)} - b \| < TOL$ (passende Norm meist $\| \cdot \|_1$ und TOL)

Beispiel: show-iterate mit verfahren = 1

Dr. rer. nat. M. Striebel

I.) Gauß-Seidel - Verfahren

▶ 16

$A = M + N$ mit $M = A_D + A_L$, $N = A_u$

$$\text{d.h. } M = A_D + A_L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

⚠ nur möglich, wenn $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$ damit M regulär

$$N = A_u = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

somit Fixpunktiteration:

$$x^{(k+1)} = -(A_D + A_L)^{-1} \cdot A_u \cdot x^{(k)} + (A_D + A_L)^{-1} \cdot b$$

nicht einfach explizit bestimmbar

besser:

$$(A_D + A_L) \cdot x^{(k+1)} = -A_u \cdot x^{(k)} + b$$

↑ LGS einfach lösbar durch Vorwärtssubstitution

elementweise betrachtet

▶ 17

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k+1)} \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k)} \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

damit ergibt sich die j-te Komponente $(j = 1,\dots,n)$ von $x^{(k+1)}$ zu:

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j\ell} \, x_\ell^{(k+1)} - \sum_{\ell=j+1}^{n} a_{j\ell} \cdot x_\ell^{(k)} \right)$$

d.h. j-te Komponente von $x^{(k+1)}$ hängt ab von den Komponenten $1, 2, \dots, j-1$ von $x^{(k+1)}$

d.h. keine Parallelisierung möglich.

Dr. rer. nat. M. Striebel

Zur Konvergenz: ohne Beweis / Begründung

▶ 18

hinreichende Bedingung: $\| M^{-1} N \| < 1$ d.h. $\| (A_D + A_L)^{-1} \cdot A_u \| < 1$

sicher erfüllt, wenn:

- A ist streng diagonaldominant
- A erfüllt das sog. Sassenfeld-Kriterium: $s < 1$

wobei $s = \max \{ s_1, \dots, s_n \}$ für

$$s_1 := \sum_{j=2}^{n} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \quad \& \quad s_\ell := \sum_{j=1}^{\ell-1} s_j \left| \frac{a_{\ell j}}{a_{jj}} \right| + \sum_{j=\ell+1}^{n} \left| \frac{a_{\ell j}}{a_{jj}} \right|$$

- A ist symmetrisch und positiv definit

Zusammenfassung:

▶ 19

GAUSS-SEIDEL-Verfahren

Es sei $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und $A = A_L + A_D + A_u \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix mit $a_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$.

Erfüllt A das Sassenberg-Kriterium (insb. ist A diagonaldominant) oder ist A symmetrisch positiv definit, dann konvergiert die Vektorfolge $(x^{(k)})$ definiert durch

$$(A_D + A_L) x^{(k+1)} = - A_u \cdot x^{(k)} + \vec{b}$$

für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen die exakte Lösung x^* des LGS $Ax = \vec{b}$

Bemerkungen:

- Gauß-Seidel-Iteration wird auch als Einzelschrittverfahren bezeichnet
- kann komponentenorientiert geschrieben werden als

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j\ell} x_\ell^{(k+1)} - \sum_{\ell=j+1}^{n} a_{j\ell} x_\ell^{(k)} \right) \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

nicht parallelisierbar

Anzahl Punktoperationen pro Iteration

$$n \left(1 + \sum_{\ell=1}^{j-1} 1 + \sum_{\ell=j+1}^{n} 1 \right) = n (1 + n - 1) = n^2$$

(Vgl. Gauß-Verfahren: $\mathcal{O}(n^3)$ zur exakten Lösung)

iii) Abbruchkriterium: $\| A x^{(k)} - b \| < TOL$ (passende Norm meist $\| \cdot \|_1$ und TOL)

Beispiel: SHOW-iterate mit verfahren = 2

iv) Konvergenzgeschwindigkeit bei Gauß-Seidel-Iteration i.A. größer als beim Jacobi-Verfahren, da auch aktuelle Iterationskomponenten mit einbezogen werden

nur im Video: Vorstellung der Eigenimplementierung SHOW-iterate für octave/matlab

▶ 20

Dr. rer. nat. M. Striebel

Bemerkungen:

- Die vorgestellten Iterationsverfahren sind sinnvoll, wenn weniger als n Iterationen durchgeführt werden müssen, um zu einer akzeptablen Näherungslösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu kommen

- Es gibt Matrizen die weder das strikte Zeilensummenkriterium noch das strikte Spaltensummenkriterium erfüllen, für die aber trotzdem auch das Jacobi-Verfahren konvergiert!

- Es gibt weitere Iterationsverfahren die auf anderen Ideen beruhen und z.T. deutlich schneller sind (z.B. Krylov-Unterraum-Verfahren)

Dr. rer. nat. M. Striebel