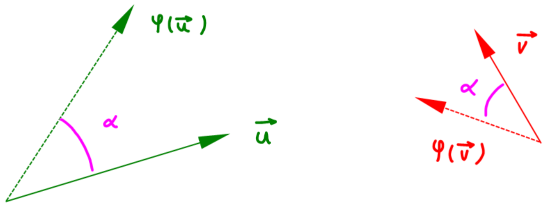
Drehung im 2D-Anschauungsraum um einen festen Winkel α

Beispiel: Bild & Urbild für Drehung mit $\alpha = 40°$



Formalisierung:

$$\varphi_\alpha : \text{2D-Anschauungsraum} \to \text{2D-Anschauungsraum}, \quad \vec{u} \mapsto \varphi_\alpha(\vec{u}) \; : \; \sphericalangle(\vec{u}, \varphi_\alpha(\vec{u})) = \alpha$$

hier: V, W : 2D-Anschauungsraum

Definition (lineare Abbildung / Homomorphismus)

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und W ein m-dimensionaler Vektorraum.

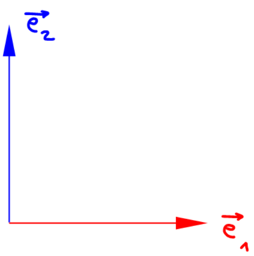
Dann heißt eine Abbildung $\varphi : V \to W$ *lineare Abbildung* (oder *Homomorphismus*), wenn für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v})$$

Der Vektor $\varphi(\vec{u}) \in W$ heißt *Bildvektor* von $\vec{u}$.

Die Menge $\varphi(V) := \{\varphi(\vec{u}) \mid \vec{u} \in V\} \subseteq W$ heißt das *Bild* von φ.

- Wir wählen als Basis von V, W die Standardeinheitsbasis / euklidische Basis:

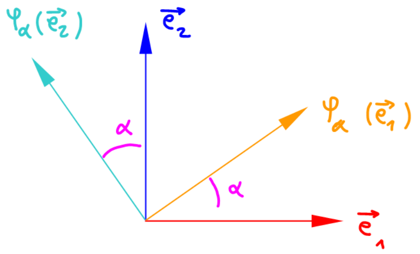


mit $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$

d.h. $V = \text{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$W = \text{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

- Wir bilden die Basisvektoren von V ab, d.h. wir drehen um α

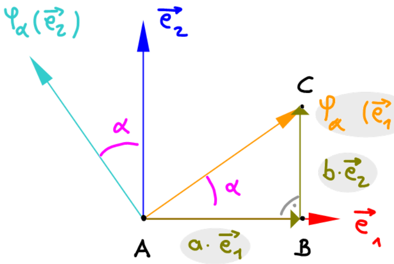


im Weiteren sei $\alpha \in (0, \pi/2)$ (*)

- Wir stellen die Bilder der Basisvektoren von V als Linearkombinationen der Basisvektoren von W dar.

Suche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $\varphi_\alpha(\vec{e}_1) = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$

$\varphi_\alpha(\vec{e}_2) = c \cdot \vec{e}_1 + d \cdot \vec{e}_2$



1.) $\underline{\varphi_\alpha(\vec{e}_1) = a\cdot\vec{e}_1 + b\vec{e}_2}$

hier: $a, b > 0$ (wegen ⊛)

dargestellt durch rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$

mit Seitenlängen:

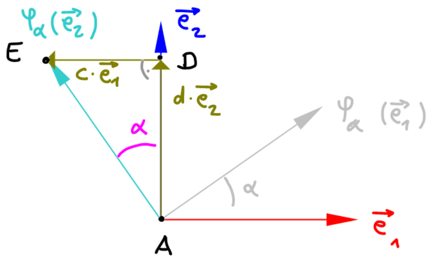
- $\overline{AB} = \|a\cdot\vec{e}_1\| = |a|\cdot\|\vec{e}_1\| = |a| = a$
- $\overline{BC} = \|b\cdot\vec{e}_2\| = |b|\cdot\|\vec{e}_2\| = |b| = b$
- $\overline{AC} = \|\varphi_\alpha(\vec{e}_1)\| = \|\vec{e}_1\| = 1$

Winkelbeziehung im rechtwinkligen Dreieck:

- $\sin(\alpha) = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{b}{1} = b \Rightarrow b = \sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{a}{1} = a \Rightarrow a = \cos(\alpha)$

d.h. $\varphi_\alpha(\vec{e}_1) = \cos(\alpha)\cdot\vec{e}_1 + \sin(\alpha)\cdot\vec{e}_2$

d.h. Koordinatenvektor von $\varphi_\alpha(\vec{e}_1)$ bzgl. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



2.) $\underline{\varphi_\alpha(\vec{e}_2) = c\cdot\vec{e}_1 + d\cdot\vec{e}_2}$

rechtwinkliges Dreieck $\triangle ADE$ mit Seitenlängen:

- $\overline{AD} = \|d\cdot\vec{e}_2\| = |d|\cdot\|\vec{e}_2\| = |d| = d$

  ($d > 0$ wegen ⊛)

- $\overline{DE} = \|c\cdot\vec{e}_1\| = |c|\cdot\|\vec{e}_1\| = |c| = -c$

  ($c < 0$ wegen ⊛)

- $\overline{EA} = \|\varphi_\alpha(\vec{e}_2)\| = \|\vec{e}_2\| = 1$

Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck:

- $\sin(\alpha) = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{EA}} = \dfrac{-c}{1} = -c \Rightarrow c = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{EA}} = \dfrac{d}{1} = d \Rightarrow d = \cos(\alpha)$

somit: $\varphi_\alpha(\vec{e}_2) = -\sin(\alpha)\cdot\vec{e}_1 + \cos(\alpha)\cdot\vec{e}_2$

d.h. Koordinatenvektor von $\varphi_\alpha(\vec{e}_2)$ bzgl $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $\begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

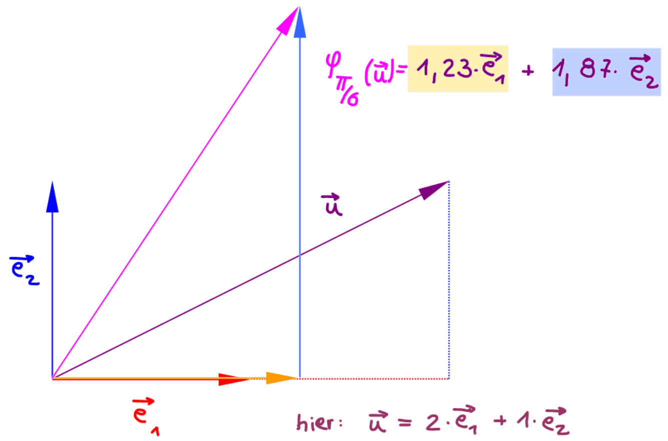
Bei Wahl von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ als Basis des 2D-Anschauungsraumes ergibt sich als Abbildungsmatrix von φ_α:

Koordinatenvektor von $\varphi_\alpha(\vec{e}_2)$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(unabhängig von ⊛)

Koordinatenvektor von $\varphi_\alpha(\vec{e}_1)$



Anwendung der Abbildungsmatrix

Für einen Vektor:

$$\vec{u} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2$$

ergibt sich: $\varphi_\alpha(\vec{u}) = y_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2$

mit $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

für z.B. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ($\hat{=}\ 30°$) und $\vec{u} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

d.h. $\varphi_{\pi/6}(\vec{u}) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \vec{e}_1 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \vec{e}_2 \approx 1{,}23 \vec{e}_1 + 1{,}87 \cdot \vec{e}_2$