Lineare Abbildungen

Definition (lineare Abbildung / Homomorphismus)

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und W ein m-dimensionaler Vektorraum.

Dann heißt eine Abbildung $\varphi : V \to W$ *lineare Abbildung* (oder *Homomorphismus*), wenn für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v})$$

Der Vektor $\varphi(\vec{u}) \in W$ heißt *Bildvektor* von $\vec{u}$.

Die Menge $\varphi(V) := \{\varphi(\vec{u}) \mid \vec{u} \in V\} \subseteq W$ heißt das *Bild* von φ.

▶ 1

Bedeutung:

$$\boxed{\varphi(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v})} = \boxed{\lambda \cdot \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v})}$$

▶ 2

Linke Seite:
① Linearkombination in V von $\vec{u}$ & $\vec{v}$ mit Koeffizienten λ & μ
② Abbildung der Linearkombination

Rechte Seite:
① Abbildung von $\vec{u}$ & $\vec{v}$
② Linearkombination in W von $\varphi(\vec{u})$ & $\varphi(\vec{v})$ mit Koeffizienten λ & μ

d.h. Reihenfolge von Linearkombination & Abbildung ist irrelevant

Beispiele:

i) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x) = 2 \cdot x$

▶ 3

hier: $V = \mathbb{R} \quad (n = 1)$
$W = \mathbb{R} \quad (m = 1)$

Behauptung: φ ist lineare Abbildung

Nachweis: seien $u, v \in \mathbb{R}\ (=V)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig

dann ist $\varphi(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = 2 \cdot (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = 2 \cdot \lambda \cdot u + 2 \cdot \mu \cdot v$

$= \lambda \cdot \underbrace{2 \cdot u}_{= \varphi(u)} + \mu \cdot \underbrace{2 \cdot v}_{= \varphi(v)} = \lambda \cdot \varphi(u) + \mu \cdot \varphi(v)$

d.h. φ ist eine lineare Abbildung, d.h. Behauptung stimmt.

Definition (lineare Abbildung / Homomorphismus)

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und W ein m-dimensionaler Vektorraum.

Dann heißt eine Abbildung $\varphi : V \to W$ *lineare Abbildung* (oder *Homomorphismus*), wenn für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v})$$

Der Vektor $\varphi(\vec{u}) \in W$ heißt *Bildvektor* von $\vec{u}$.

Die Menge $\varphi(V) := \{\varphi(\vec{u}) \mid \vec{u} \in V\} \subseteq W$ heißt das *Bild* von φ.

ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \; \vec{x} = g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

hier: $\varphi = g$, $V = \mathbb{R}^3$ $(n=3)$, $W = \mathbb{R}^2$ $(m=2)$

Behauptung: g ist eine lineare Abbildung

Nachweis:

seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig

ausführlich:

mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ mit $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ ist

$$\boxed{g(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v})} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1) + 2 \cdot (\lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2) - 1 \cdot (\lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3) \\ 2 \cdot (\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1) + 1 \cdot (\lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2) + 3 \cdot (\lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot \lambda \cdot u_1 + 1 \cdot \mu \cdot v_1 + 2 \lambda \cdot u_2 + 2 \cdot \mu \cdot v_2 - 1 \cdot \lambda \cdot u_3 - 1 \cdot \mu \cdot v_3 \\ 2 \lambda \cdot u_1 + 2 \mu \cdot v_1 + 1 \cdot \lambda \cdot u_2 + 1 \cdot \mu \cdot v_2 + 3 \lambda \cdot u_3 + 3 \cdot \mu \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda \cdot 1 \cdot u_1 + \mu \cdot 1 \cdot v_1 + \lambda \cdot 2 \cdot u_2 + \mu \cdot 2 \cdot v_2 + \lambda (-1) \cdot u_3 + \mu (-1) \cdot v_3 \\ \lambda \cdot 2 u_1 + \mu \cdot 2 \cdot v_1 + \lambda \cdot 1 \cdot u_2 + \mu \cdot 1 \cdot v_2 + \lambda \cdot 3 \cdot u_3 + \mu \cdot 3 \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda \cdot (1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + (-1) \cdot u_3) + \mu (1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3) \\ \lambda \cdot (2 u_1 + 1 \cdot u_2 + 3 u_3) + \mu (2 v_1 + 1 \cdot v_2 + 3 v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + (-1) \cdot u_3 \\ 2 u_1 + 1 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 \\ 2 v_1 + 1 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \lambda \cdot g(\vec{u}) + \mu \cdot g(\vec{v})}$$

Somit ist g eine lineare Abbildung, d.h. die Behauptung stimmt.

<u>Kompakter</u>

g ist von der Form: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \; \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

d.h. $g(\vec{x})$ ist Ergebnis einer Matrix-Vektor-Multiplikation

$\downarrow$ Rechenregeln

$$g(\lambda \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = A \cdot (\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A \cdot \vec{u} + \mu \cdot A \cdot \vec{v} = \lambda \, g(\vec{u}) + \mu \cdot g(\vec{v})$$

damit ist durch $g(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ eine lineare Abbildung gegeben

im Beispiel: $n = 3$, $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d.h. die Beispielfunktion ist eine lineare Abbildung

iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto f(x) = x^2$ ▶ 5

Behauptung: f ist <u>keine</u> lineare Abbildung

Nachweis (über ein Zahlenbeispiel, d.h. über eine konkrete Wahl von $u, v \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) \neq \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$)

mit $u = 1, \; v = 3, \; \lambda = 1, \; \mu = -2$ ist

- $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = f(1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = f(-5) = (-5)^2 = 25$
- $\lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v) = 1 \cdot f(1) - 2 \cdot f(3) = 1 \cdot 1^2 - 2 \cdot 3^2 = 1 - 18 = -17$

$\neq$

d.h. $f(1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) \neq 1 \cdot f(1) - 2f(3)$

d.h. nicht für alle $u, v \in \mathbb{R}$ & $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$

d.h. f ist <u>keine</u> lineare Abbildung

d.h. Behauptung stimmt.

Definition (lineare Abbildung / Homomorphismus)

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und W ein m-dimensionaler Vektorraum.

Dann heißt eine Abbildung $\varphi : V \to W$ *lineare Abbildung* (oder *Homomorphismus*), wenn für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v})$$

Der Vektor $\varphi(\vec{u}) \in W$ heißt *Bildvektor* von $\vec{u}$.

Die Menge $\varphi(V) := \{\varphi(\vec{u}) \,|\, \vec{u} \in V\} \subseteq W$ heißt das *Bild* von φ.

iv) $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \; \vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$ ▶ 6

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$

Behauptung: φ ist eine lineare Abbildung

Nachweis: seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig

dann

- $\varphi(\lambda \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = A \cdot (\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) + \vec{b}$
$$= \lambda \cdot A \cdot \vec{u} + \mu \cdot A \cdot \vec{v} + \vec{b}$$

- $\lambda \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v}) = \lambda \cdot (A \cdot \vec{u} + \vec{b}) + \mu (A \cdot \vec{v} + \vec{b})$
$$= \lambda \cdot A \cdot \vec{u} + \lambda \vec{b} + \mu \cdot A \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{b}$$
$$= \lambda A \vec{u} + \mu \cdot A \cdot \vec{v} + (\lambda + \mu) \cdot \vec{b}$$

d.h. $\varphi(\lambda \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v})$ <u>nur dann wenn $\lambda + \mu = 1$</u>

d.h. es gilt <u>nicht für alle</u> $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und <u>für alle</u> $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{u}) + \mu \cdot \varphi(\vec{v})$

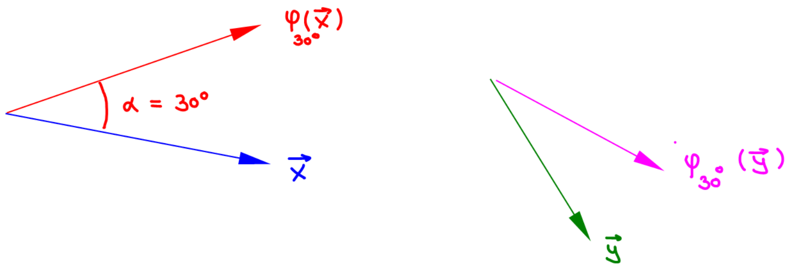
$\Rightarrow$ φ ist keine lineare Abbildung

(d.h. Behauptung ist falsch)

v) Drehung im 2D-Anschauungsraum um einen festen Winkel α

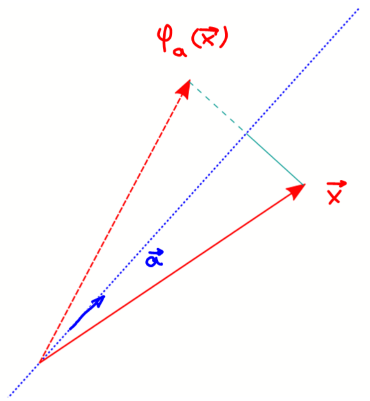
φ_α : Vektoren aus 2D $\rightarrow$ Vektoren aus 2D, $\vec{x} \mapsto \varphi_\alpha(\vec{x}) \hat{=}$ Drehung von $\vec{x}$ um den Winkel α

ist eine lineare Abbildung



vi) Spiegelung im 2D-Anschauungsraum an einer vorgegebenen Achse

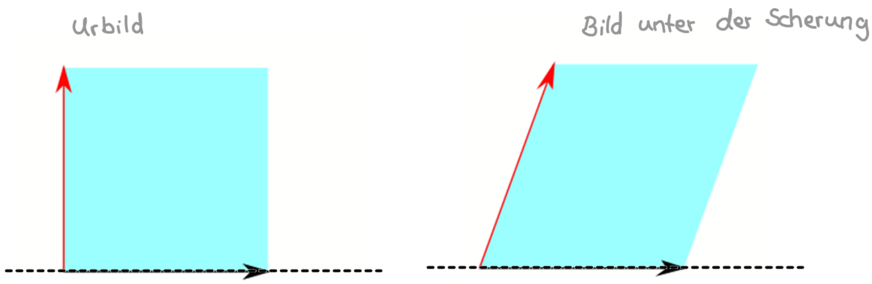
φ_a : Vektoren aus 2D $\rightarrow$ Vektoren aus 2D, $\vec{x} \mapsto \varphi_a(\vec{x}) \hat{=}$ Spiegelung von $\vec{x}$ an einer Achse mit Richtung $\vec{a}$



ist eine lineare Abbildung

vii) Scherung im 2D-Anschauungsraum entlang/parallel zur gedachten Horizontalen

φ : 2D-Vektoren $\rightarrow$ 2D-Vektoren



ist eine lineare Abbildung

Wir werden zeigen

Ist $\varphi: V \to W$ mit $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ eine lineare Abbildung, dann lässt sich $\varphi(\vec{u})$ identifizieren / beschreiben durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation in der Form

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$$

wobei A eine $m \times n$-Matrix ist, die von der jeweils gewählten Basis von V und W abhängt, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ der Koordinatenvektor von $\vec{u}$ zur gewählten Basis von V und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ der Koordinatenvektor von $\varphi(\vec{u})$ zur gewählten Basis von W ist, schreiben.