Matrix – Darstellung linearer Abbildungen

▶ 1

Gegeben : lineare Abbildung $\varphi : V \to W$

mit $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ $(n, m \in \mathbb{N})$

Sei
- $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ eine Basis von V
- $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\} \subset W$ eine Basis von W

1.) Bilder der Basisvektoren von V

▶ 2

für $k = 1, 2, \dots, n$ gilt : $\varphi(\vec{v}_k) \in W$

d.h. es existieren eindeutige reelle Koeffizienten $a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{m,k} \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\vec{v}_k) = a_{1,k} \cdot \vec{w}_1 + a_{2,k} \cdot \vec{w}_2 + \dots + a_{m,k} \cdot \vec{w}_m$$

Kompakt: $\boxed{\varphi(\vec{v}_k) = \sum_{p=1}^{m} a_{p,k} \cdot \vec{w}_p}$

2) Bild eines beliebigen Vektors aus V

▶ 3

Für $\vec{u} \in V$ und $\vec{z} := \varphi(\vec{u}) \in W$ gilt:

- da $\vec{u} \in V$ gibt es eindeutige reelle Koeffizienten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u} = x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n$$

Kompakt: $\boxed{\vec{u} = \sum_{q=1}^{n} x_q \cdot \vec{v}_q}$

$k = q$

- da $\vec{z} \in W$ gibt es eindeutige reelle Koeffizienten $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$

$$\vec{z} = y_1 \cdot \vec{w}_1 + y_2 \cdot \vec{w}_2 + \dots + y_m \cdot \vec{w}_m$$

Kompakt: $\boxed{\vec{z} = \sum_{p=1}^{m} y_p \cdot \vec{w}_p}$ (*)

- mit $\vec{z} = \varphi(\vec{u})$ gilt:

$$\vec{z} = \varphi(\vec{u}) = \varphi\left(\sum_{q=1}^{n} x_q \cdot \vec{v}_q\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ ist lineare Abbildung}}}{=} \sum_{q=1}^{n} x_q \cdot \varphi(\vec{v}_q)$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \left(x_q \cdot \left(\sum_{p=1}^{m} a_{p,q} \cdot \vec{w}_p \right) \right)$$

algebraische Umformung

$$= \boxed{\sum_{p=1}^{m} \left(\left(\sum_{q=1}^{n} a_{p,q} \cdot x_q \right) \cdot \vec{w}_p \right) = \vec{z}} \quad (*)$$

Nach ⊛ gilt:

$$\vec{z} = \sum_{p=1}^{m} y_p \cdot \vec{w}_p = \sum_{p=1}^{m} \left(\sum_{q=1}^{n} a_{p,q} \cdot x_q \right) \cdot \vec{w}_p$$

somit ist:
$$y_p = \sum_{q=1}^{n} a_{p,q} \cdot x_q \quad \text{für } p = 1, 2, .., m$$

d.h.
$$y_1 = \sum_{q=1}^{n} a_{1,q} \cdot x_q = a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n$$

$$y_2 = \sum_{q=1}^{n} a_{2,q} \cdot x_q = a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,n} \cdot x_n$$

$$\vdots$$

$$y_m = \sum_{q=1}^{n} a_{m,q} \cdot x_q = a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{m,n} \cdot x_n$$

dies lässt sich kompakt schreiben: ▶ 4

mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\varphi(\vec{v}_k) = \sum_{p=1}^{m} a_{p,k} \cdot \vec{w}_p \quad \text{für } k = 1, .., n$$

d.h.
$$\varphi(\vec{v}_1) = a_{1,1} \cdot \vec{w}_1 + a_{2,1} \cdot \vec{w}_2 + \cdots + a_{m,1} \vec{w}_m$$
$$\varphi(\vec{v}_2) = a_{1,2} \cdot \vec{w}_1 + a_{2,2} \cdot \vec{w}_2 + \cdots + a_{m,2} \cdot \vec{w}_m$$
$$\vdots$$
$$\varphi(\vec{v}_n) = a_{1,n} \cdot \vec{w}_1 + a_{2,n} \cdot \vec{w}_2 + \cdots + a_{m,n} \cdot \vec{w}_m$$

ist $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$

$\vec{x}$: Koordinatenvektor von $\vec{u} \in V$ bzgl. der Basis $\{\vec{v}_1, .., \vec{v}_n\}$

A: Abbildungsmatrix: k-te Spalte $(k = 1, .., n)$ = Koordinatenvektor von $\varphi(\vec{v}_k) \in W$ bzgl. der Basis $\{\vec{w}_1, .., \vec{w}_m\}$

$\vec{y}$: Koordinatenvektor von $\varphi(\vec{u}) \in W$ bzgl. der Basis $\{\vec{w}_1, .., \vec{w}_m\}$

Zusammenfassung: ▶ 5

- jede lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ zwischen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen V, W lässt sich beschreiben durch ein Matrix-Vektor-Produkt mit einer Abbildungsmatrix deren Spaltenzahl gleich der Dimension von V ist und deren Zeilenzahl mit der Dimension von W übereinstimmt.
- jede lineare Abbildung ist vollständig beschrieben durch die Abbildungen der Basisvektoren von V.
- die Abbildungsmatrix hängt ab von der gewählten Basis von V und der gewählten Basis von W.
- jede Matrix lässt sich interpretieren als Beschreibung einer linearen Abbildung.