Raum der Matrizen

Definition (Matrix)

Das Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

mit n Zeilen und m Spalten ($n, m \in \mathbb{N}^*$) heißt $n \times m$-*Matrix*. Das Element, das in der $i$ten Zeile und der $k$ten Spalte steht ist $a_{i,k}$. Man nennt i den *Zeilenindex* und k den *Spaltenindex* des *Matrixelements* $a_{i,k}$.

Man schreibt auch $A = A_{n\times m} = (a_{i,k})_{n,m} = (a_{i,k})$.

Die Menge aller $n \times m$-Matrizen mit reellen Einträgen wird als $\mathbb{R}^{n\times m}$ oder auch als $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ bezeichnet.

▶ 1

Beispiele:

▶ 2

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 8 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, 2×3 Matrix

ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 5}$

iv) $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ aber auch $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (Matrizen als Erweiterung der Vektoren)

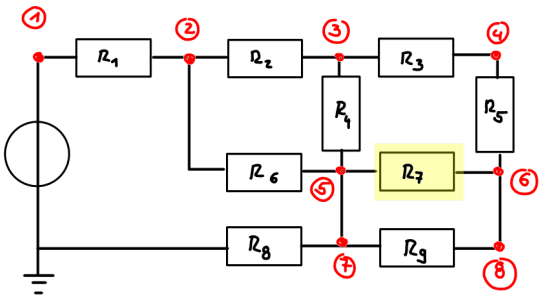
v) $F = (1) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ aber auch $1 \in \mathbb{R}^1$, $1 \in \mathbb{R}$ (Erweiterung: reelle Zahlen, reelle Vektoren, reelle Matrizen)

vi) $A = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $a_{i,k} = \frac{i}{k}$ $(i = 1,2,3;\ k = 1,2,3,4)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

vii) $A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 9}$

Inzidenzmatrix



viii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

stehen in Verbindung zum linearen Gleichungssystem

$$1\cdot x_1 + 2x_2 + 3\cdot x_3 = 0$$
$$4\cdot x_1 + 1\cdot x_2 - 7\cdot x_3 = -12$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Definition (spezielle Matrixformen)

i.) Eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,k})$ heißt *quadratische Matrix der Ordnung* n. Die Elemente $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ heissen *Hauptdiagonalelemente* von A.

ii.) Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,k})$ heißt *Diagonalmatrix*, wenn $a_{i,k} = 0$ für alle $i \neq k$ gilt.

iii.) Eine Diagonalmatrix der Ordnung n mit $a_{i,i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ heißt *Einheitsmatrix* E_n oder E oder I_n oder I der Ordnung n.

iv.) Eine quadratische Matrix, die unterhalb bzw. oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen enthält heißt *obere* bzw. *untere Dreiecksmatrix*.
Es gilt also $a_{i,k} = 0$ für $k < i$ bzw. $k > i$.

v.) Die $n \times m$-Matrix mit $a_{i,k} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ & $k = 1, \ldots, m$ heißt *Nullmatrix* $O_{n,m}$.

vi.) Eine $n \times 1$-Matrix heißt n-dimensionaler *Spaltenvektor*.

vii.) Eine $1 \times m$-Matrix heißt m-dimensionaler *Zeilenvektor*.

▶ 3

Beispiele

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: Diagonalelemente: 1, 3 ; $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 8 & \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, Diagonalelemente: 2, 1, π

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

iii) $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

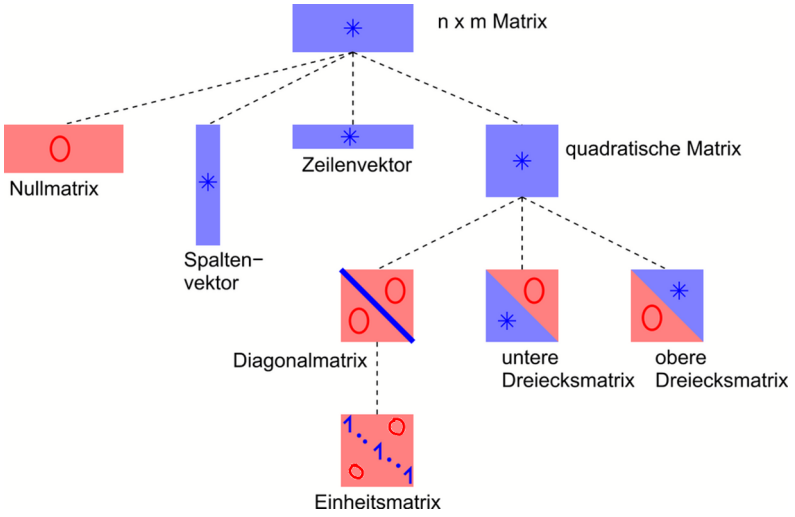
iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & \pi & e & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ untere Dreiecksmatrix

v) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

vi) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ $(\in \mathbb{R}^4)$ 4 dimensionaler Spaltenvektor

vii) $(1 \quad 3 \quad 4 \quad 8 \quad 9) \in \mathbb{R}^{1\times 5}$ 5 dimensionaler Zeilenvektor

auch: (1,3,4,8,9) „Komma" als Elementtrenner



▶ 4

Dr. rer. nat.
M. Striebel

Definition (Addition und skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^{n\times m}$)

Sei $n, m \in \mathbb{N}^*$ fest gewählt.

Dann definiert man eine „Addition zweier $n \times m$-Matrizen“ und eine „skalare Multiplikation“ wie folgt:

i.) *(Matrix-)Addition im* $\mathbb{R}^{n\times m}$

Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist die Summe $A + B$ der beiden Matrizen „komponentenweise definiert“, d. h.

$$A + B = (a_{i,k})_{n,m} + (b_{i,k})_{n,m} = (a_{i,k} + b_{i,k})_{n,m}$$

ii.) *skalare Multiplikation in* $\mathbb{R}^{n\times m}$

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $c \in \mathbb{R}$ ist die Multiplikation der Zahl (des *Skalars*) c mit der Matrix A „komponentenweise definiert“,d. h.

$$c \cdot A := c \cdot (a_{i,k})_{n,m} = (c \cdot a_{i,k})_{n,m}$$
$$= A \cdot c$$

▶ 5

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 6 & 2 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad c = 5 \in \mathbb{R}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 6 & 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 7-8 \\ -3+6 & 2+2 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$c \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 7 \\ 5(-3) & 5\cdot 2 & 5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 35 \\ -15 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

nicht definiert: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\quad$ $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Satz (Vektorraum der $n \times m$ Matrizen)

Der Raum der $n \times m$-Matrizen ist zusammen mit der Matrixaddition und der skalaren Multiplikation ein reeller Vektorraum der Dimension $n \cdot m$

▶ 6

Bemerkungen

i) $O_{n,m}$ ist die „Null“ aus $\mathbb{R}^{n\times m}$

ii) Basisvektoren im Raum der $n \times m$ Matrizen (eine Möglichkeit)

$$B^{(p,q)} = (b_{i,k}^{(p,q)}) \quad \text{mit } p = 1,..,n \text{ und } q = 1,..,m$$

$$\text{mit } b_{i,k}^{(p,q)} = \begin{cases} 1, & i = p \ \& \ k = q \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i = 1,..,n \ \& \ k = 1,..,m$$

Beispiel im Raum der 2×3 Matrizen

$$B^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(1,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Weitere Begriffe und Operationen

Definition (Gleichheit von Matrizen)

Zwei Matrizen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B = (b_{k,l}) \in \mathbb{R}^{p\times q}$ heissen *gleich*, und man schreibt $A = B$, wenn sie dieselbe Anzahl von Zeilen und Spalten haben, d. h. falls $n = p$ & $m = q$, und wenn alle Matrixelemente übereistimmen, d. h. $a_{i,j} = b_{i,j}$ für $i = 1, \ldots, n$ & $j = 1, \ldots, m$.

▶ 7

Beispiele

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = B$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$
- $A \neq D$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ gleiche Form, Abweichung in einem
- $A \neq C$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (ungleicher Form)

Definition (Transponieren einer Matrix)

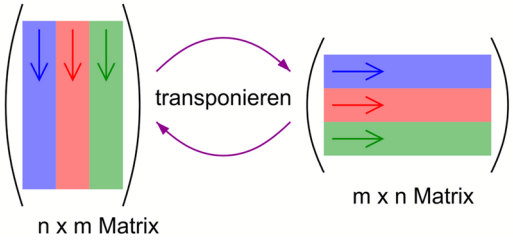
Gegeben sei eine $n \times m$-Matrix $A = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Dann nennt man die $m \times n$-Matrix, die aus A durch Überführung der Spalten in Zeilen entsteht, die *zu A transponierte Matrix* (*die Transponierte von A*).

Man symbolisiert die Transponierte von A durch A^T (sprich: „A transponiert“).

Mit $A = (a_{i,k})$ und $A^T = (a^T_{i,k})$ gilt dann die Beziehung $a^T_{i,k} = a_{k,i}$.

▶ 8



Beispiele

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}^T = (1 \quad 2 \quad 4)$ $\left(\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}^T = (1 \quad 2 \quad 4) \right)$

v) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ hier: $C = C^T$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Definition (symmetrische Matrix)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$A^T = A$$

▶ 9

Beispiele

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ symmetrisch denn $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ symmetrisch

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 2 \\ 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ nicht symmetrisch, denn $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 2 \\ 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\neq$

Satz (zweimaliges Transponieren)

Das Transponieren neutralisiert das Transponieren:

$$\left(A^T\right)^T = A \quad \text{für jede Matrix } A \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

▶ 10

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$\neq$ $=$

Dr. rer. nat. M. Striebel