Matrix – Multiplikation

Definition (Matrix – Multiplikation) ▶ 1

Für eine $n \times k$-Matrix $A = (a_{i,j})$ und eine $k \times m$-Matrix $B = (b_{p,q})$ kann das Produkt $A \cdot B$ der beiden Matrizen definiert werden.

$C := A \cdot B$ ist dann eine $n \times m$-Matrix deren Elemente $c_{i,j}$ sich wie folgt ergeben:

$$c_{i,j} := \sum_{l=1}^{k} a_{i,l} \cdot b_{l,j}, \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \;\&\; j = 1, \ldots, m.$$

⚠ wichtig: $A \cdot B$ ist nur definiert wenn gilt: Anzahl der Spalten von A = Anzahl der Zeilen von B

dann hat das Produkt gleich viele Zeilen wie A und gleichviele Spalten wie B

▶ 2

Falksches Schema

				$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$\ldots$	$b_{1,m}$
				$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$\ldots$	$b_{2,m}$
				$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
				$b_{k,1}$	$b_{k,2}$	$\ldots$	$b_{k,m}$
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\ldots$	$a_{1,k}$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\rightarrow$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\ldots$	$a_{2,k}$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\rightarrow$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$				
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\ldots$	$a_{n,k}$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\rightarrow$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ ▶ 3

			-1	1	2
			-2	0	-1
			7	-3	4
1	2	-3	$1\cdot(-1)+2(-2)+(-3)\cdot 7 = -26$	$1\cdot 1+2\cdot 0+(-3)(-3) = 10$	$1\cdot 2+2(-1)+(-3)\cdot 4 = -12$
$\rightarrow 2$	1	4	$2(-1)+1\cdot(-2)+4\cdot 7 = 24$	$2\cdot 1+1\cdot 0+4(-3) = -10$	$2\cdot 2+1\cdot(-1)+4\cdot 4 = 19$

somit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 10 & -12 \\ 24 & -10 & 19 \end{pmatrix}$

hier $B \cdot A$: $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\neq$ d.h. $B \cdot A$ nicht definiert

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $=$ $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & -8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

nicht Kommutativ $\neq$

		1	3
		8	-2
2	7	$2\cdot 1+7\cdot 8 = 58$	$2\cdot 3+7(-2) = -8$
$\rightarrow 3$	1	$3\cdot 1+1\cdot 8 = 11$	$3\cdot 3+1(-2) = 7$

▶ 4

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 54 \end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad$ $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad$ $\in$

		2	7
	3		1
1	3	$1\cdot 2 + 3\cdot 3 = 11$	$1\cdot 7 + 3\cdot 1 = 10$
→ 8	−2	$8\cdot 2 + (-2)\cdot 3 = 10$	$8\cdot 7 + (-2)\cdot 1 = 54$

▶ 5

Beispiel:

$$x = (1, 3, -2) \in \mathbb{R}^{1\times 3}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Transponieren

$$x \cdot y = (1, 3, -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 3\cdot 8 + (-2)\cdot 6 = 2 + 24 - 12 = 14$$

Erinnerung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

dann $\underbrace{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}_{\text{Skalarprodukt}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot 2 + 3\cdot 8 + (-2)\cdot 6 = 2 + 24 - 12 = 14 = \underbrace{\vec{x}^T \cdot \vec{y}}_{\text{Matrix-Multiplikation}}$

Satz (Skalarprodukt als Matrix-Multiplikation) ▶ 6

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$ wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Matrix-Multiplikation neu überdacht ▶ 7

Matrix-Vektor-Multiplikation

Definition (Matrix-Vektor-Multiplikation – element weise) ▶ 8

Ist $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit n Einträgen, dann ist $\vec{y} := A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor mit m Einträgen, die sich wie folgt ergeben:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$y_l = \sum_{k=1}^{n} a_{l,k} \cdot x_k \quad \text{für } l = 1, \dots, m$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2(-1) + 4(-3) \\ 0\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 7(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -24 \end{pmatrix}$$

▶ 9

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2(-1) + 4(-3) \\ 0\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 7(-3) \end{pmatrix} = 2\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

▶ 10

Linearkombination der Spalten der Matrix wobei die Komponenten des Vektors die Koeffizienten der Linearkombination darstellt.

Definition (Matrix-Vektor-Multiplikation – spaltenweise)

▶ 11

Es sei $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit n Einträgen.

Fasst man die n Spalten von A als Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n} \in \mathbb{R}^m$ auf, d. h.

$$\vec{a_k} = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{pmatrix} \text{ für } k = 1, \ldots, n \quad \text{und somit} \quad A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}),$$

dann ist das $\vec{y} := A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ definiert als

$$\vec{y} = x_1 \cdot \vec{a_1} + \ldots + x_n \cdot \vec{a_n},$$

d. h. als Linearkombination der Spalten von A in der die Komponenten von $\vec{x}$ die Koeffizienten darstellen.

Die Definitionen sind gleichbedeutend.

Beispiel:

▶ 12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

dann $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ nicht $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

nicht sinnvolles Objekt

somit $A\cdot\vec{x} = 1\cdot\vec{a}_1 + 7\cdot\vec{a}_2 + 3\cdot\vec{a}_3 = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 49 \\ 0 \\ 21 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ 26 \\ 34 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Matrix - Multiplikation

Definition (Matrix - Multiplikation — spaltenweise)

Es sei A eine $n \times k$-Matrix und B eine $k \times m$-Matrix.

Sind $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$ mit $\vec{b}_i \in \mathbb{R}^k$ $(k = 1, \ldots, m)$ die m Spalten der Matrix B, d. h. $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m)$. Dann ist das Produkt $C := A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ in spaltenbasierter Formulierung definiert als:

$$A \cdot B := \left(A \cdot \vec{b}_1, \ldots, A \cdot \vec{b}_m\right)$$

wobei $A \cdot \vec{b}_k$ für $k = 1, \ldots, m$ Matrix-Vektor-Produkte sind.

▶ 13

⚠ Diese Definition ist gleichbedeutend zur Definition am Anfang dieses Abschnittes

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

1. Spalte — 2. Spalte — 3. Spalte

$$= \begin{pmatrix} 8 & 6 & 15 \\ -1 & 12 & 28 \end{pmatrix}$$

Satz (Rechenregeln der Matrix - Multiplikation)

▶ 14

Für alle Matrizen A, B, C gilt, falls die jeweiligen Matrix-Produkte existieren:

i.) *Assoziativgesetz*: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

ii.) *Distributivgesetz*: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ & $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

iii.) *Neutrales Element*:
Für jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $A \cdot E = E \cdot A = A$ $\quad (E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n})$

⚠ iv.) Im Allgemeinen gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$, selbst wenn $A \cdot B$ und $B \cdot A$ vom selben Format sind. Das Matrix-Produkt ist also nicht kommutativ. ▶ 15

⚠ v.) Das Produkt von Matrizen ist nicht nullteilerfrei, d. h. für $A \neq 0$ und $B \neq 0$ kann also auch $A \cdot B = 0$ gelten. ▶ 16

vi.) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, insbesondere $\left(A \cdot A^T\right)^T = A \cdot A^T$ ▶ 17

insb. $A\,A^T$ quadratisch & symmetrisch

Beispiel:

zu. iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 21 & 18 \\ 30 & 35 \end{pmatrix} \quad (A \in \mathbb{R}^{2\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 2})$$

$$\neq$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 28 & 17 & 45 \\ 30 & 8 & 38 \end{pmatrix} \quad (B \in \mathbb{R}^{3\times 2}, A \in \mathbb{R}^{2\times 3})$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

zu v.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

↑ nicht Null-Matrix

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Nullmatrix $\quad (B \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

zu vi) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$A \cdot B$		1	-2
		1	4
2	1	$2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$	$2(-2)+1\cdot 4 = 0$
3	5	$3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 8$	$3\cdot(-2)+5\cdot 4 = 14$
→ 7	0	$7\cdot 1 + 0\cdot 1 = 7$	$7(-2)+0\cdot 4 = -14$

$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 14 \\ 7 & -14 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & 14 & -14 \end{pmatrix}$

$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & 14 & -14 \end{pmatrix}$ ⟵ (=)

zu vi) mit $A = \mathbb{R}^{n\times m}$ ist $A^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$

d.h. $A \cdot A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ d.h. quadratisch

und $(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$ symmetrisch ($(A^T)^T = A$)

auch $A^T \cdot A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ quadratisch & $(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A$ symmetrisch ($(A^T)^T = A$)

Bemerkungen: ▶ 18

i) Da die Matrix-Multiplikation nicht multiplikativ ist spricht man von einer Multiplikation „von links" bzw. „von rechts" ($A \cdot B$ vs. $B \cdot A$ ← A wird von links mit B multipliziert)

↑ A wird von rechts mit B multipliziert

ii) Durch Matrizen (und Vektoren) dividiert man nicht!

das gibt es nicht: $\frac{A}{B}$ oder $\frac{A}{\vec{x}}$ oder dergleichen !!

Dr. rer. nat. M. Striebel