Spaltenraum & Rang einer Matrix

▶ 0 einführende Worte und Spaltenraum & Rang einer Matrix

▶ 1

Erinnerung: Interpretation der Matrix-Vektor-Multiplikation:

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $A\vec{x} \hat{=}$ Linearkombination der Spalten von $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$, $\vec{a}_k \in \mathbb{R}^m$ in der die Komponenten von $\vec{x}$ die Koeffizienten darstellen

$$A\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \vec{a}_k \in \operatorname{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$$

↑ lineare Hülle von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Definition (Spaltenraum einer Matrix)

▶ 2

Es sei $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ eine $m \times n$-Matrix mit Spalten $\vec{a}_k \in \mathbb{R}^m$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Der von den Spalten von A aufgespannte Unterraum

$$\mathrm{Col}(A) := \operatorname{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

heißt *Spaltenraum der Matrix* A.

Definition (Zeilenraum einer Matrix)

▶ 3

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

eine $m \times n$-Matrix mit Zeilen $b_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ $(k = 1, 2, \dots, m)$.

Der von den Zeilen von A aufgespannte Unterraum

$$\mathrm{Row}(A) := \operatorname{span}(b_1, \dots, b_m)$$

heißt *Zeilenraum der Matrix* A.

Bemerkung:

▶ 4

Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dann ist

$\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ & $\mathrm{Row}(A) \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}$

Spaltenraum & Zeilenraum sind Vektorräume

Beispiel:

▶ 5

Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

$$\mathrm{Col}(A) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Row}(A) = \operatorname{span}\left((1\ 0), (2\ 3), (-7\ 2) \right) = \left\{ \lambda_1 \cdot (1\ 0) + \lambda_2 (2\ 3) + \lambda_3 (-7\ 2) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Col}(A)$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$(46\ \ 2) = 3 \cdot (1\ 0) + 4 \cdot (2\ 3) - 5 \cdot (-7\ 2) \in \mathrm{Row}(A)$ $\qquad (46\ \ 2) = (3\ \ 4\ \ -5) \cdot A$

$\| \qquad \begin{pmatrix} 46 \\ 2 \end{pmatrix}^T$ mit $\begin{pmatrix} 46 \\ 2 \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Definition (Rang einer Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix.

Man nennt die Dimension des Spaltenraumes von A (welche identisch ist zur Dimension des Zeilenraumes von A) den *Rang* der Matrix A:

$$\operatorname{rang}(A) := \dim(\operatorname{Col}(A)) = \dim(\operatorname{Row}(A))$$

▶ 6

Bemerkungen:

- alternative Abkürzungen: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rank}(A)$
- Dimension des Spaltenraumes = Dimension des Zeilenraumes

$\subseteq \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $\subseteq \mathbb{R}^{1 \times n}$

$\dim(\operatorname{Col}(A)) \leq m$ $\qquad$ $\dim(\operatorname{Row}(A)) \leq n$

▶ 7

$$\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Col}(A)) = \dim(\operatorname{Row}(A)) \leq \min(m,n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) \leq \min(m,n)}$$

- $\boxed{\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)}$ ▶ 8
- Ist A eine quadratische Matrix, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dann sagt man

$$\boxed{\text{„}A \text{ hat vollen Rang“} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n}$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

Definition (rechts obere Zeilenstufenform)

Eine $m \times n$ Matrix A hat *(rechts obere) Zeilenstufenform*, wenn jede Zeile (von der 2. bis zur m. Zeile) mehr „führende Nullen“ besitzt als ihre jeweilige Vorgängerzeile. ⊛

Als „führende Nullen“ einer Matrix-Zeile bezeichnet man die Null-Einträge in dieser Zeile von links nach rechts gelesen, bis zur ersten von Null verschiedenen Zahl. Ist etwa die k. Zeile von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{k,p+1} & a_{k,p+2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

mit $a_{k,p+1} \neq 0$ so besitzt diese Zeile p führende Nullen.

Besteht eine Zeile nur aus Nullen, d. h. hat sie n führende Nullen, wird sie als *Nullzeile* bezeichnet. Enthält Sie auch von Null verschiedene Zahlen, nennt man sie *Nicht-Nullzeile*.

⊛ Ist eine Zeile eine Nullzeile, so müssen alle weiteren Zeilen auch Nullzeilen sein.

▶ 9

Beispiele

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ← 0 führende Nullen, ← 1 führende Null, ← 2 führende Nullen

↓ wachsende Zahl führender Nullen

Matrix in rechts oberer Zeilenstufenform ▶ 10

Keine Nullzeile, 3 Nicht-Nullzeilen

ii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ← 0 führende Nullen, ← 0 führende Nullen, ← 1 führende Null

Keine wachsende Zahl führender Nullen

Matrix ist nicht in rechts oberer Zeilenstufenform ▶ 11

Keine Nullzeile, 3 Nicht-Nullzeilen

iii) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ← 1 führende Null, ← 3 führende Nullen, ← 4 führende Nullen

↓ wachsende Zahl führender Nullen

Matrix in rechts oberer Zeilenstufenform ▶ 12

Keine Nullzeile, 3 Nicht-Nullzeilen

Dr. rer. nat. M. Schebel

iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ← 3 führende Nullen ← 1 führende Null ← 4 führende Nullen

Keine wachsende Zahl führender Nullen

Matrix ist nicht in rechts oberer Zeilenstufenform

Keine Nullzeile, 3 Nicht-Nullzeilen

▶ 13

v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← 1 führende Null ← 2 führende Nullen ← 3 führende Nullen / Nullzeile

↓ wachsende Zahl führender Nullen

Matrix in rechts oberer Zeilenstufenform

1 Nullzeile, 2 Nicht-Nullzeilen

▶ 14

vi) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← 0 führende Nullen ← 1 führende Null ← 4 führende Nullen / Nullzeile ← 4 führende Nullen / Nullzeile

↓ wachsende Zahl führender Nullen

Matrix in rechts oberer Zeilenstufenform

2 Nullzeilen, 2 Nicht-Nullzeilen

▶ 15

Rang einer Matrix in rechts oberer Zeilenstufenform – beispielhafte Betrachtung

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

A ist Matrix in rechts oberer Zeilenstufenform

1 Nullzeile, 3 Nicht-Nullzeilen

▶ 16

Zeilen: $b_1 = (1,2,0,7)$, $b_2 = (0,3,1,4)$, $b_3 = (0,0,2,1)$, $b_4 = (0,0,0,0)$

gesucht: $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Row}(A))$

mit $\operatorname{Row}(A) = \operatorname{span}(b_1,b_2,b_3,b_4) = \left\{ \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \cdot b_k \mid \lambda_1,\dots,\lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}$

1.) sind b_1,b_2,b_3,b_4 l.u.a.?

nein, sie sind l.a. denn $b_4 = (0,0,0,0)$ Nullaus $\mathbb{R}^{1\times 4}$

$\lceil b_1,b_2,b_3,b_4$ l.u.a $\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = (0,0,0,0)$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

hier: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1$ (d.h. nicht alle Koeffizienten sind 0)

$\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 + \lambda_4 b_4 = 1 \cdot (0,0,0,0) = (0,0,0,0)$ d.h. b_1,b_2,b_3,b_4 l.a. $\rfloor$

d.h. $\dim(\operatorname{Row}(A)) < 4$

2.) sind b_1,b_2,b_3 l.u.a.?

Nullzeile b_4 trägt nichts bei

da $b_4 = (0,0,0,0)$ ist $\left\{ \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \cdot b_k \mid \lambda_1,\dots,\lambda_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \cdot b_k \mid \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$

d.h. $\operatorname{Row}(A) = \operatorname{span}(b_1,b_2,b_3)$

wenn ja, dann gilt $\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 = (0,0,0,0)$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

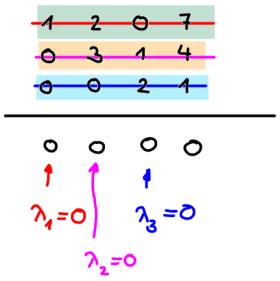
$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 = \lambda_1 \cdot (1,2,0,7) + \lambda_2 (0,3,1,4) + \lambda_3 \cdot (0,0,2,1)$$
$$= (\lambda_1, 2\lambda_1, 0, 7\cdot\lambda_1) + (0, 3\cdot\lambda_2, \lambda_2, 4\lambda_2) + (0,0,2\lambda_3,\lambda_3)$$
$$= (\lambda_1, 2\lambda_1 + 3\cdot\lambda_2, \lambda_2 + 2\lambda_3, 7\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3) \stackrel{!}{=} (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0$$
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$
$$7\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

ja, b_1,b_2,b_3 l.u.a.

Dr. rer. nat. M. Striebel



← Nicht-Nullzeilen einer (jeder) Matrix in rechts oberer Zeilenstufenform sind garantiert l.u.a.

3.) da b_1, b_2, b_3 l.u.a und $\text{Row}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \cdot b_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$

ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ Basis von $\text{Row}(A)$

$\Rightarrow \dim(\text{Row}(A)) = 3$

$\parallel$

$\text{rang}(A)$

Allgemein gilt:

Satz (Rang einer Matrix in Zeilenstufenform)

Es sei A eine $m \times n$-Matrix in (rechts oberer) Zeilenstufenform.

Dann gilt

$$\text{rang}(A) = \#\text{ Nicht-Nullzeilen} = m - (\#\text{ Nullzeilen})$$

In Worten: der Rang einer Matrix in Zeilenstufenform ist gleich der Anzahl der Nicht-Nullzeilen, d. h. der Anzahl der Zeilen minus der Anzahl der Nullzeilen

▶ 17

Bemerkungen:

- # steht für „Anzahl"
- nur bei Matrizen in Zeilenstufenform ist der Rang direkt an der Matrix ablesbar aber: jede Matrix hat einen Rang!

? Wie bestimmt man diesen?

Dr. rer. nat. M. Striebel

Allgemeine Rangbestimmung durch „Elementare Zeilenumformungen"

▶ 18

Beispielhaftes Vorgehen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rang}(A) \leq \min(3,4) = 3$$

▶ 19

↑ nicht in Zeilenstufenform ⇒ rang (A) nicht direkt abzulesen

$$\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Row}(A)) = \dim(\operatorname{Row}(A_1)) = \dim(\operatorname{Row}(A_2)) = \dim(\operatorname{Row}(A_3)) = \operatorname{rang}(A_3) = 3$$

mit $\operatorname{Row}(A) = \{ \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}$

mit $b_1 = (0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3) =: c_2$
$b_2 = (1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 5) =: c_1$
$b_3 = (2 \;\; 1 \;\; 7 \;\; -2) =: c_3$

$\updownarrow \; \lambda_1 = \mu_2, \; \lambda_2 = \mu_1, \; \lambda_3 = \mu_3$

$= \{ \mu_1 \cdot c_1 + \mu_2 \cdot c_2 + \mu_3 \cdot c_3 \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Row}(A_1)$

mit $c_1 = (1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 5) =: d_1$
$c_2 = (0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3) =: d_2$
$c_3 = (2 \;\; 1 \;\; 7 \;\; -2)$

$\rightsquigarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

$\updownarrow \; \mu_1 = \alpha_1 - 2\alpha_3, \; \mu_2 = \alpha_2, \; \mu_3 = \alpha_3$

$= \{ \alpha_1 \cdot c_1 + \alpha_2 \cdot c_2 + \alpha_3 (c_3 - 2 \cdot c_1) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$

$\parallel$

$(2,1,7,-2) - 2(1,4,2,5) = (2,1,7,-2) + (-2,-8,-4,-10)$
$= (2-2, 1-8, 7-4, -2-10) = (0,-7,3,-12) =: d_3$

$= \{ \alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2 + \alpha_3 \cdot d_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Row}(A_2)$

mit $d_1 = (1, 4, 2, 5) =: f_1$
$d_2 = (0, 1, 2, 3) =: f_2$
$d_3 = (0, -7, 3, -12)$

$\rightsquigarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{pmatrix}$

$\updownarrow \; \alpha_1 = \beta_1, \; \alpha_2 = \beta_2 + 7 \cdot \beta_3, \; \alpha_3 = \beta_3$

$= \{ \beta_1 \cdot d_1 + \beta_2 \cdot d_2 + \beta_3 (d_3 + 7 \cdot d_2) \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \}$

$\parallel$

$(0,-7,3,-12) + 7 \cdot (0,1,2,3) = (0,-7,3,-12) + (0,7,14,21)$
$= (0+0, -7+7, 3+14, -12+21) = (0,0,17,9) =: f_3$

$= \{ \beta_1 \cdot f_1 + \beta_2 \cdot f_2 + \beta_3 \cdot f_3 \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Row}(A_3)$

mit $f_1 = (1, 4, 2, 5)$
$f_2 = (0, 1, 2, 3)$
$f_3 = (0, 0, 17, 9)$

$\rightsquigarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 9 \end{pmatrix}$

A_3 ist eine Matrix in Zeilenstufenform.

Daher ist $\operatorname{rang}(A_3)$ einfach abzulesen: $\operatorname{rang}(A_3) = 3$

$\parallel$

$\dim(\operatorname{Row}(A_3))$

▶ 20

hier:

Addition eines Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile

$A \rightsquigarrow A_1 \rightsquigarrow A_2 \rightsquigarrow A_3$

↑ Zeilentausch

Rang hat sich nicht verändert

aber die Matrix: $A \neq A_1 \neq A_2 \neq A_3$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Definition & Satz (elementare Zeilenumformungen)

Die folgenden Operationen, *elementare Zeilenumformungen* (EZU) genannt, ändern den Rang einer Matrix nicht:

I) Addition des $\lambda-$fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile unter Beibehaltung der ursprünglichen Zeile,

II) Vertauschen zweier Zeilen,

III) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$.

▶ 21

Bemerkungen

i.) EZUen ändern nicht den Rang aber die Matrix, d.h. wird auf A eine EZU angewandt so entsteht dadurch i.A. eine neue Matrix $\tilde{A}$ mit $\tilde{A} \neq A$ aber $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\tilde{A})$
Man nennt dann A und $\tilde{A}$ äquivalent (hinsichtlich des Ranges) und schreibt auch $A \sim \tilde{A}$

ii) EZUen dienen i.A. zur Überführung einer Matrix in eine Matrix in Zeilenstufenform.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 9 \end{pmatrix} \quad \operatorname{rang} = 3$$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$

▶ 22

Dr. rer. nat. M. Striebel