Definition (Rang einer Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix.

Man nennt die Dimension des Spaltenraumes von A (welche identisch ist zur Dimension des Zeilenraumes von A) den *Rang* der Matrix A:

$$\operatorname{rang}(A) := \dim(\operatorname{Col}(A)) = \dim(\operatorname{Row}(A))$$

▶ 1

mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{mit } b_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \text{ für } k = 1, \dots, m$$

$$= (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \quad \text{mit } \vec{a}_\ell = \begin{pmatrix} a_{\ell,1} \\ a_{\ell,2} \\ \vdots \\ a_{\ell,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ für } \ell = 1, \dots, n$$

ist $\operatorname{Col}(A) = \operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ & $\operatorname{Row}(A) = \operatorname{span}(b_1, b_2, \dots, b_m)$

und **rang (A) = Anzahl linear unabhängiger Spalten von A = Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A**

Beispiel gegeben $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n \in \mathbb{R}^m$

Fragestellungen:
- sind $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n$ l.u.a. ? : ja, wenn rang (A) = n
- Dimension des von $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ aufgespannten Untervektorraum ? $\dim(\operatorname{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)) = \operatorname{rang}(A)$

Antwortstrategie:
- bilde eine Matrix $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n) =: A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- bestimme rang (A)

▶ 2

Satz (Rang einer Matrix in Zeilenstufenform)

Es sei A eine $m \times n$-Matrix in (rechts oberer) Zeilenstufenform.

Dann gilt

$$\operatorname{rang}(A) = \#\text{ Nicht-Nullzeilen} = m - (\#\text{ Nullzeilen})$$

In Worten: der Rang einer Matrix in Zeilenstufenform ist gleich der Anzahl der Nicht-Nullzeilen, d. h. der Anzahl der Zeilen minus der Anzahl der Nullzeilen

Definition & Satz (elementare Zeilenumformungen)

Die folgenden Operationen, *elementare Zeilenumformungen* (EZU) genannt, ändern den Rang einer Matrix nicht:

I) Addition des λ−fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile unter Beibehaltung der ursprünglichen Zeile,

II) Vertauschen zweier Zeilen,

(III) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$.)

Dr. rer. nat. M. Striebel

Vorwärtselimination – Überführung einer Matrix in eine Matrix in Zeilenstufenform

▶ 3

- Erzeuge Nullen in 1. Spalte der Zeilen 2 bis m mit Hilfe des Elements $a_{1,1}$ und EZU I)

Begriff: $a_{1,1}$: Pivotelement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \left| -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \right. \\ \\ \left| -\frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} \right. \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2} & \cdots & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m,2} & \cdots & \tilde{a}_{m,n} \end{pmatrix} =: \tilde{A}$$

$$a_{2,1} + \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot a_{11} = 0$$

$$\tilde{a}_{2,2} = a_{22} + \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot a_{12}$$

nur möglich, falls $a_{1,1} \neq 0$, sonst:

1. Fall $\exists\, p \in \{2, \ldots, m\}$ mit $a_{1,p} \neq 0$

dann vertausche 1. mit p. Zeile (EZU Typ II):

neues Pivotelement

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{p,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} =: \hat{A}$$

Verfahre nach 1.) auf $\hat{A}$

2. Fall $a_{j,1} = 0 \;\forall\, j \in \{1, \ldots, m\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Verfahre wie beschrieben auf der $m \times (n-1)$-Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Operiere in gleicher Weise auf $(m-1) \times (n-1)$-Teilmatrix

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiele

i.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 1 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} =: \tilde{A}$ (in Zeilenstufenform)

▶ 4

$\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 3 = \operatorname{rang}(A)$

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \end{matrix}$

▶ 5

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \tilde{A}$

$\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 2 = \operatorname{rang}(A)$

d.h. $\dim\left(\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-1\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\3\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\\2\\4\end{pmatrix}\right)\right) = 2$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-4) \\ \cdot(-7) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot\left(-\frac{-6}{-3} = -2\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =: \tilde{A}$

▶ 6

$\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 3 = \operatorname{rang}(A)$

[NR: $2 - \frac{3}{2} \cdot 3 = 2 - \frac{9}{2} = \frac{4}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$]

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \\ \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -5/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -5/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot 5/2 \end{matrix}$

▶ 7

[NR: $1 + 8 \cdot \frac{5}{2} = 21$]

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot\left(-\frac{7}{21} = -\frac{1}{3}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \tilde{A}$

$\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 3 = \operatorname{rang}(A)$

Dr. rer. nat. M. Striebel