# Inverse einer Matrix

Erinnerung: durch eine Matrix teilt man nicht!

d.h. für Matrizen $A, B$ ist $\frac{B}{A}$ nicht definiert. ▶ 1

aber: u.U. gibt es zu einer Matrix $A$ eine Matrix $A^{-1}$ (aber: $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$)

Wiederholung: in $\mathbb{R}$ bezeichnet $a^{-1}$ das multiplikativ Inverse zu $a \in \mathbb{R}$ (mit $a \neq 0$)

d.h. für gegebenes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt für $c := a^{-1}$ : $a \cdot c = 1$ & $c \cdot a = 1$ ▶ 2

kurz: $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$

$1$: multiplikativ neutrales Element ($\forall b \in \mathbb{R}: b \cdot 1 = 1 \cdot b = b$)

$\cdot$: Multiplikation reeller Zahlen

Berechnung des multiplikativ Inversen: $a^{-1} = \frac{1}{a}$, „1 geteilt durch a"

Beispiel: • $3^{-1} = \frac{1}{3}$ denn: $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1 = 3 \cdot \frac{1}{3}$

• $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 1 \cdot \frac{5}{1} = 5$ denn: $5 \cdot \frac{1}{5} = 1 = \frac{1}{5} \cdot 5$

⚠ da die Multiplikation in $\mathbb{R}$ kommutativ ist ergibt der Ausdruck $\frac{b}{a}$ einen Sinn, denn:

$\frac{b}{a} = b \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b$

## Übertragung des Konzeptes „multiplikativ Inverses" auf Matrizen ▶ 3

~~gegeben: reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$~~ ← Vorgabe zu allgemein

~~gesucht: reelle Matrix $A^{-1}$ so, dass:~~

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$ = multiplikativ neutrales Element bzgl. Matrixmultiplikation

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ nur definiert für $A^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ mit $p \in \mathbb{N}$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ nur definiert für $A^{-1} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ mit $q \in \mathbb{N}$

erfüllbar für: $q = m$ & $p = n$

d.h. $A^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ▶ 4

damit: • $A^{-1} \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

• $A \cdot A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

die Forderung $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$ erzwingt: $m = n$

d.h. die Suche nach einer Inversen nur sinnvoll für quadratische Matrizen!

$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$

$1$: multiplikativ neutrales Element ($\forall b \in \mathbb{R}: b \cdot 1 = 1 \cdot b = b$)

$\cdot$: Multiplikation reeller Zahlen

Idee zur Inversen einer Matrix: ▶ 5

- gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- gesucht: $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

**Definition** (Inverse einer Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.

Existiert zur Matrix $A$ eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass gilt

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n,$$

wobei $E_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix ist, dann nennt man $A$ *invertierbar* und $A^{-1}$ die *Inverse der Matrix* $A$.

**Definition** (reguläre und singuläre Matrix)

Ist eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so sagt man, sie ist *regulär*.

Andernfalls, d. h. falls $A$ keine Inverse besitzt, nennt man sie *singulär*.

▶ 6

**Bemerkung:**

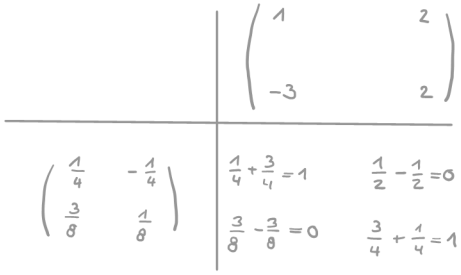
- regulär $\hat{=}$ invertierbar
- singulär $\hat{=}$ nicht invertierbar

} für quadratische Matrix

**Beispiele:**

i) zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

▶ 7




denn: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d.h. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$

d.h. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ist regulär

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/5 & -2/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

▶ 8

d.h. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ ist regulär mit Inverser $\begin{pmatrix} 7/5 & -2/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

iii.) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist regulär mit Inverser: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1/3 & -5/3 & 4/3 & 2 \end{pmatrix}$

▶ 9

iv.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ sind singuläre Matrizen

▶ 10

**Satz** (Rechenregeln der Matrix-Inversen)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei reguläre Matrizen, zudem sei $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

▶ 11

i.) $A \cdot B$ ist regulär und es ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. ← Reihenfolge wird umgekehrt

ii.) $(A^{-1})^{-1} = A$ ← Inverse der Inverse ist Ausgangsmatrix

iii.) $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$ ← Invertierung & Transponieren kommutieren

iv.) $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$. ← LGS lässt sich, falls A regulär ist mit Hilfe der Inversen lösen

☺ eher nicht machen

denn: Aufwand sehr viel größer als mit Gauß-Verfahren wenn $A^{-1}$ erst bestimmt werden muss und $n > 2$

**Nachweis:**

zu i.) Behauptung: $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

▶ 12

- $B^{-1}\cdot \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{=E_n}\cdot B = B^{-1}\cdot \underbrace{E_n\cdot B}_{=B} = B^{-1}\cdot B = E_n$
- $A\cdot \underbrace{B\cdot B^{-1}}_{=E_n}\cdot A^{-1} = A\cdot \underbrace{E_n\cdot A^{-1}}_{=A^{-1}} = A\cdot A^{-1} = E_n$

d.h. $\underbrace{(B^{-1}\cdot A^{-1})}_{=(A\cdot B)^{-1}}(A\cdot B) = (A\cdot B)\underbrace{(B^{-1}\cdot A^{-1})}_{=(A\cdot B)^{-1}} = E_n$ #

zu ii.) Behauptung: $(A^{-1})^{-1} = A$

▶ 13

Wir wissen: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E_n$

mit $B := A^{-1}$ also: $B\cdot A = A\cdot B = E_n$

d.h. A ist die Inverse von B, d.h. $A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$ #

zu iii) Behauptung: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

▶ 14

Wir wissen: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E_n$

d.h. $\underbrace{(A^{-1}\cdot A)^T}_{}$ $= \underbrace{(A\cdot A^{-1})^T}_{} = E_n^T$

$\Rightarrow A^T\cdot (A^{-1})^T = (A^{-1})^T\cdot A^T = E_n$

mit $B := A^T$ ist: $B\cdot (A^{-1})^T = (A^{-1})^T\cdot B = E_n$

d.h. $(A^{-1})^T$ ist die Inverse von B, d.h. $(A^{-1})^T = B^{-1} = (A^T)^{-1}$ #

Bemerkung:

manchmal liest man $A^{-T}$

damit ist gemeint $(A^T)^{-1}$ bzw. $(A^{-1})^T$

Dr. rer. nat. M. Striebel

zu iv) Behauptung

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

▶ 15

denn: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow$ ($1 \cdot A^{-1}$ von links) $A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow E_n \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ #

($A^{-1} \cdot A = E_n$, $E_n \cdot \vec{x} = \vec{x}$)

## Warum man nicht durch Matrizen dividiert

▶ 16

Kurz gesagt: weil die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, d.h. für invertierbare Matrix A ist i.A. $B \cdot A^{-1} \neq A^{-1} \cdot B$ für passende Matrix B

Beispiel: für $A = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

und mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ : $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\neq$

$B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}$

daher ist nicht klar, was „$\frac{B}{A}$" bedeuten soll: $A^{-1} \cdot B$ oder $B \cdot A^{-1}$

Zudem wird $A^{-1}$ nicht berechnet als z.B. „$\frac{E_n}{A}$" d.h. durch bloße Division

Dr. rer. nat. M. Striebel