Zur Bestimmung der Inversen und der Regularität einer Matrix

Definition (Inverse einer Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.

Existiert zur Matrix A eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass gilt

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n,$$

wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist, dann nennt man A *invertierbar* und A^{-1} die *Inverse der Matrix* A.

gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

gesucht: $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A \cdot A^{-1} = E_n$

▶ 1

mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ und $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sind $x_{11}, \ldots, x_{nn} \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= \vec{x}_1$ $= \vec{x}_2$ $= \vec{x}_n$ $= \vec{e}_1$ $= \vec{e}_2$ $= \vec{e}_n$

bzw. $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ so, dass ($\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ sind die zu bestimmenden Spalten von A^{-1})

$$A \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad (A\cdot\vec{x}_1, A\cdot\vec{x}_2, \ldots, A\cdot\vec{x}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad A\cdot\vec{x}_1 = \vec{e}_1 \wedge A\cdot\vec{x}_2 = \vec{e}_2 \wedge \ldots \wedge A\cdot\vec{x}_n = \vec{e}_n$$

falls A invertierbar ist (d.h. falls A regulär ist) dann sind alle diese LGSe lösbar und umgekehrt

$$\Leftrightarrow \quad A\cdot\vec{x}_k = \vec{e}_k \quad \forall\, k = 1, \ldots, n$$

mit $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ mit Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ von A (bekannt)

und $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, k = 1, \ldots, n$

ist $A\cdot\vec{x}_k = \vec{e}_k \Leftrightarrow (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix} = \vec{e}_k \quad \forall\, k = 1, \ldots, n$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_{1,k}\cdot\vec{a}_1 + x_{2,k}\cdot\vec{a}_2 + \ldots + x_{n,k}\cdot\vec{a}_n = \vec{e}_k} \quad \forall\, k = 1, \ldots, n$$

qualitativ: Linearkombination der Spalten von A

$x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}$: Koeffizienten der Linearkombination

Dr. rer. nat. M. Striebel

Somit gilt:

zu $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ gibt es eine Inverse A^{-1}, d.h. A ist regulär, genau dann, wenn sich jeder Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ (d.h. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$) darstellen lässt als Linearkombination der Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ von A.

▶ 2

Da $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ sind müssen $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ also auch eine Basis von $\mathbb{R}^n$ sein.

Formal:

$$A \text{ regulär} \iff \mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathrm{span}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \mathbb{R}^n$$

$$\iff \mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$\uparrow$ $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

Wir haben also gezeigt:

Satz (Regularität einer quadratischen Matrix)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann regulär, d. h. invertierbar, wenn sie vollen Rang hat. Andernfalls ist sie singulär.

Formal ausgedrückt:

$$A \text{ regulär} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$$
$$A \text{ singulär} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) < n$$

▶ 3

Beispiele:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

▶ 4

Rangbestimmung über Vorwärtselimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Big]^{+3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

d.h. $\mathrm{rang}(A) = 2 \Rightarrow A$ ist regulär

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

▶ 5

Rangbestimmung über Vorwärtselimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Big]^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Big]^{-\frac{2}{3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$-1 - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

d.h. $\mathrm{rang}(A) = 3 \Rightarrow A$ ist regulär

Dr. rer. nat. M. Striebel

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ▶ 6

Rangbestimmung über Vorwärtselimination

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rang $(A) = 3 < 4 \Rightarrow$ A ist singulär

Zur Eindeutigkeit der Inversen

? Gibt es, falls A regulär ist, nur eine Inverse oder mehrere? ▶ 7

$\exists! \hat{=}$ „es existiert genau ein"

A regulär $\Rightarrow$ rang $(A) = n \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ (insbesondere) $\exists! \vec{x}_1 : A\vec{x}_1 = \vec{e}_1 \wedge \exists! \vec{x}_2 : A\vec{x}_2 = \vec{e}_2 \wedge \dots \wedge \exists! \vec{x}_n : A\vec{x}_n = \vec{e}_n$

$\Rightarrow \exists! A^{-1} := (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) : A \cdot A^{-1} = E_n$

Satz (Eindeutigkeit der Inversen)

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, so gibt es **genau eine** Inverse A^{-1} zur A.

Dr. rer. nat. M. Striebel

Ist „unser" A^{-1} tatsächlich die Inverse von A, d.h. gilt auch $A^{-1} \cdot A = E_n$?

8

Ausgangspunkt:
- $\operatorname{rang}(A) = n$
- $\exists!\ A^{-1}: A \cdot A^{-1} = E_n$

zudem: $A = E_n \cdot A = A \cdot E_n$

i.) da $\operatorname{rang}(A) = n$ hat die Matrix-Gleichung $A \cdot Y = A$ für unbekanntes $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau eine Lösung.

denn mit $Y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ und $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ gilt:

$$A \cdot Y = A \Leftrightarrow A(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \Leftrightarrow (A\vec{y}_1, A\vec{y}_2, \dots, A\vec{y}_n) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\Leftrightarrow A\vec{y}_1 = \vec{a}_1 \wedge A\vec{y}_2 = \vec{a}_2 \wedge \dots \wedge A\vec{y}_n = \vec{a}_n$$

da $\operatorname{rang}(A) = n$: $\exists!\ \vec{y}_1: A\vec{y}_1 = \vec{a}_1 \wedge \exists!\ \vec{y}_2: A\vec{y}_2 = \vec{a}_2 \wedge \dots \wedge \exists!\ \vec{y}_n: A\vec{y}_n = \vec{a}_n$

d.h. $\exists!\ Y \in \mathbb{R}^{n \times n}: A \cdot Y = A$

da $A \cdot E_n = A$ ist $Y = E_n$ eine Lösung von $A \cdot Y = A$

da es nur eine Lösung gibt ist $A \cdot Y = A \Leftrightarrow Y = E_n$

ii) mit $A = E_n \cdot A$ und $E_n = A \cdot A^{-1}$ gilt:

$$A = (A \cdot A^{-1}) \cdot A = A \cdot (A^{-1} \cdot A)$$

d.h. $A \cdot (A^{-1} \cdot A) = A$ d.h. $Y := A^{-1}A$ eine Lösung von $A \cdot Y = A$

aus i.) $A \cdot Y = A \Leftrightarrow Y = E_n$

d.h. $A^{-1} \cdot A = E_n$

d.h. $\forall A: A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$ d.h. A^{-1} ist die Inverse von A

Dr. rer. nat. M. Striebel

Gauß - Jordan - Algorithmus zur Berechnung der Inversen einer Matrix

Ausgangspunkt: • $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = n$

▶ 9

gesucht: $A^{-1} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ so, dass $A \cdot A^{-1} = E_n$

wie gesehen: $A \cdot A^{-1} = E_n \Leftrightarrow A\vec{x}_1 = \vec{e}_1 \wedge A\vec{x}_2 = \vec{e}_2 \wedge \dots \wedge A \cdot \vec{x}_n = \vec{e}_n$

- $A\vec{x}_1 = \vec{e}_1$: LGS für $\vec{x}_1$ ↓ Gauß-Verfahren mit $(A \mid \vec{e}_1)$
- $A\vec{x}_2 = \vec{e}_2$: LGS für $\vec{x}_2$ ↓ Gauß-Verfahren mit $(A \mid \vec{e}_2)$
- $A \cdot \vec{x}_n = \vec{e}_n$: LGS für $\vec{x}_n$ ↓ Gauß-Verfahren mit $(A \mid \vec{e}_n)$

identischer Koeffiziententeil: A steuert die Vorwärtselimination

Zusammenfassung:

$$(A \mid \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = (A \mid E_n)$$

damit ergibt sich:

$(A \mid E_n)$

↓ EZU (Vorwärtselimination)

$(\triangle \mid B)$

↓ EZU (Rückwärtselimination)

$(E_n \mid A^{-1})$

Gauß - Jordan - Algorithmus

man starte mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A \mid E_n)$ und forme mit EZUen solange um bis sich A in E_n gewandelt hat.
Dann steht rechts die Inverse von A: A^{-1}

Beispiele:

▶ 10

i.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Ansatz: $(A \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (-1)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right)$$

$\left(-1 - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right)$$

↑ Vorwärtselimination

↓ Rückwärtselimination

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \cdot (-1)$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$\Gamma\ 1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rceil -4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 5 & -4 & -6 \end{array}\right) \quad | \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{4}{3} & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rceil 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rceil 1 \end{array}$$

$$\Gamma_{1-\frac{5}{3}} = \tfrac{3}{3} - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{2}{3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{4}{3} & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{4}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{4}{3} & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rceil -1 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rceil -1 \end{array}$$

$$\Gamma_{\frac{4}{3}-1} = \tfrac{4}{3} - \tfrac{3}{3} = \tfrac{1}{3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{1}{3} & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{4}{3} & 2 \end{array}\right) \quad | \cdot (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{4}{3} & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rceil 1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{5}{3} & \tfrac{4}{3} & 2 \end{array}\right)$$

$= E_4$ $\qquad$ $= A^{-1}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

somit: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1/3 & -5/3 & 4/3 & 2 \end{pmatrix}$

Inverse einer 2×2-Matrix

▶ 12

Ausgangspunkt: reguläre 2×2-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Ansatz: $(A \mid E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$

1. Fall: $a \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \Big] - \frac{c}{a}$$

$$d - \frac{c}{a} \cdot b = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{a}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a \cdot d - c \cdot b}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \Big| \cdot \frac{a}{a \cdot d - c \cdot b}$$

$a \cdot d - c \cdot b \neq 0$ denn $\operatorname{rang}(A) = 2 \wedge a \neq 0$

d.h. c & d können nicht zugleich 0 sein

und b & d können nicht zugleich 0 sein

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{a \cdot d - c \cdot b} & \frac{a}{a \cdot d - c \cdot b} \end{array}\right) \Big] - b$$

$$1 + \frac{c \cdot b}{a \cdot d - c \cdot b} = \frac{(a \cdot d - c \cdot b) + c \cdot b}{a \cdot d - c \cdot b} = \frac{a \cdot d}{a \cdot d - c \cdot b}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{a \cdot d}{a \cdot d - c \cdot b} & \frac{-a \cdot b}{a \cdot d - c \cdot b} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{a \cdot d - c \cdot b} & \frac{a}{a \cdot d - c \cdot b} \end{array}\right) \Big| \cdot \frac{1}{a} \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{a \cdot d - c \cdot b} & \frac{-b}{a \cdot d - c \cdot b} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{a \cdot d - c \cdot b} & \frac{a}{a \cdot d - c \cdot b} \end{array}\right)$$

falls $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{a \cdot d - c \cdot b} & \frac{-b}{a \cdot d - c \cdot b} \\ \frac{-c}{a \cdot d - c \cdot b} & \frac{a}{a \cdot d - c \cdot b} \end{pmatrix}$$

Sichergestellt: $a \cdot d - c \cdot b \neq 0$ da $\operatorname{rang}(A) = 2$

$$= \frac{1}{a \cdot d - c \cdot b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

2. Fall: $a = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\operatorname{rang}(A) = 2 \Rightarrow b \neq 0 \wedge c \neq 0$

Ansatz: $(A \mid E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{b} \neq 0$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} c & 0 & -\frac{d}{b} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{c} \neq 0$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{b \cdot c} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right)$$

d.h. $\quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{b \cdot c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$

vgl: $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - c \cdot b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\downarrow$ einsetzen: $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{0 \cdot d}_{=0} - c \cdot b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c \cdot b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{d}{b \cdot c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Zwischenstand:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ regulär $\Rightarrow \quad ad - cb \neq 0 \quad \wedge \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ singulär

dann $\operatorname{rang}(A) < 2$ und es existiert somit λ, so dass $(c, d) = \lambda \cdot (a, b)$

d.h. $\exists \lambda: (c, d) = (\lambda a, \lambda b)$ also $c = \lambda a \wedge d = \lambda b$

dann: $a \cdot d - c \cdot b = a \cdot \lambda b - \lambda \cdot a \cdot b = \lambda ab - \lambda \cdot ab = 0$

d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ singulär $\Rightarrow \quad a \cdot d - cb = 0$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Somit gilt:

Satz (Regularität einer 2×2-Matrix und Inverse)

Eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann regulär, wenn gilt $a \cdot d - c \cdot b \neq 0$.

Ist A regulär, dann ist

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c \cdot b} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

▶ 13

Bemerkungen

i) für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $a \cdot d - c \cdot b \;\hat{=}$ Produkt der Diagonalelemente minus Produkt der Gegendiagonalelemente

ii) für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist „$ad - cb$" eine Kenngröße der 2×2-Matrix: $\det(A)$ „Determinante"

es gilt: $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ singulär $\wedge$ $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ regulär

iii) für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(A) = ad - cb \neq 0$ ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Vertauschung der Diagonalelemente
- Vorzeichenänderung der Gegendiagonalelemente

Beispiele:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = 2 + 6 = 8 \neq 0 \Rightarrow A$ regulär ▶ 14

mit $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2 = -4 + 4 = 0 \Rightarrow A$ singulär ▶ 15

iii) gesucht: $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ▶ 16

$= A$

mit $\det(A) = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 7 = -2 - 21 = -23 \neq 0$

ist A regulär mit $A^{-1} = \frac{1}{-23} \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/23 & 7/23 \\ 3/23 & -1/23 \end{pmatrix}$

und somit: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/23 & 7/23 \\ 3/23 & -1/23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/23 - 7/23 \\ 3/23 + 1/23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/23 \\ 4/23 \end{pmatrix}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Inverse einer Diagonalmatrix

Für $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $\operatorname{rang}(D) = n \Leftrightarrow d_1 \neq 0 \wedge d_2 \neq 0 \wedge \ldots \wedge d_n \neq 0$

▶ 17

d.h. D ist regulär $\Leftrightarrow$ alle Diagonalelemente ungleich 0

$$\Downarrow$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & 0 \\ & 1/d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1/d_n \end{pmatrix}$$

Beispiele:

i) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ regulär mit $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

ii) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ Singulär, da ein Diagonalelement 0 ist

▶ 18 Zusammenfassung: Was Sie wissen sollten!

Matrix-Inverse zum symbolischen Auflösen von Matrix-Gleichungen: Beispielhafte Erklärung

▶ 19

- gegeben: Matrizen A, B, C regulär soweit nötig
  gesucht: Matrix X so, dass:

$$B^{-1} \cdot (AX)^T \cdot C = (B^{-1} + A^T) \cdot C$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} X^T \cdot A^T \cdot C = (B^{-1} + A^T) \cdot C \mid \cdot C^{-1} \text{ v.R. (von Rechts)}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} X^T A^T \cdot \underbrace{C \cdot C^{-1}}_{=E} = (B^{-1} + A^T) \cdot \underbrace{C \cdot C^{-1}}_{=E}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} X^T A^T = B^{-1} + A^T \mid \cdot (A^T)^{-1} \text{ v.R.}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} X^T \underbrace{A^T (A^T)^{-1}}_{=E} = (B^{-1} + A^T) \cdot (A^T)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} X^T = B^{-1} \cdot (A^T)^{-1} + \underbrace{A^T \cdot (A^T)^{-1}}_{=E}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} X^T = B^{-1} (A^T)^{-1} + E \mid \cdot B \text{ v.L.}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{=E} \cdot X^T = \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{=E} (A^T)^{-1} + \underbrace{B \cdot E}_{=B}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$\Leftrightarrow \quad X^T = (A^T)^{-1} + B \quad | \text{ Transponieren}$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \left((A^T)^{-1} + B\right)^T$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \left((A^T)^{-1}\right)^T + B^T$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \left((A^{-1})^T\right)^T + B^T$$

$$\Leftrightarrow \quad X = A^{-1} + B^T$$

i.A. $C^{-1} \cdot X \cdot C \neq \underbrace{X \cdot C^{-1} \cdot C}_{= X}$ d.h. C^{-1} nicht „durchschleifen"

Matrix-Multiplikation i.A. nicht kommutativ

Dr. rer. nat. M. Striebel