▶ 1 im Video: Erinnerung Gauß - Jordan

Berechnung der Inversen einer Matrix mit Hilfe der Adjunkten ▶ 2

Ausgangspunkt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

▶ 3 • Untermatrix

Definition (Untermatrix einer quadratischen Matrix)

Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Dann nennt man für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$, die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $A_{i,k}$, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte hervorgeht,

$$A_{i,k} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

die *Untermatrix von A (zum Element $a_{i,k}$)*

Dr. rer. nat. M. Striebel

Bemerkungen: ▶ 4

- Untermatrizen lassen sich auch für nicht-quadratische Matrizen bilden, d.h. für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $n \neq m$
- Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es $n \cdot n = n^2$ Untermatrizen

Beispiel: ▶ 5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

- $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ aus $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- $A_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ aus $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- $A_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ aus $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

- Minor der Ordnung n-1 ▶ 6

Definition (Minor der Ordnung n-1)

Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix A.

Dann nennt man für jedes Paar $(i,k) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$, die Determinante $M_{i,k} \in \mathbb{R}$ der $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix $A_{i,k}$, d. h.

$$M_{i,k} = \det(A_{i,k}) = |A_{i,k}|$$

Minor der Ordnung $n-1$ (zum Element $a_{i,k}$ der Matrix A)

Bemerkungen: ▶ 7

- zu einer nxn – Matrix A gibt es $n \cdot n = n^2$ Minoren der Ordnung n-1
- Für $q \in \{1,\dots,n-1\}$ nennt man die Determinante einer $(n-q) \times (n-q)$– Matrix die durch Streichung von q Zeilen & q Spalten aus A hervorgeht einen Minor der Ordnung n-q
- Statt „Minor" wird auch der Begriff Unterdeterminante benutzt

▶ 8 Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

- $M_{1,1} = \det(A_{1,1}) = -30$ aus $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $M_{3,4} = \det(A_{3,4}) = -14$ aus $A_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
- $M_{4,3} = \det(A_{4,3}) = -50$ aus $A_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

bestimmt man alle Minoren 4. Ordnung und platziert man sie in einer entsprechenden Matrix erhält man hier: ▶ 9

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} & M_{1,5} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} & M_{2,5} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} & M_{3,5} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} & M_{4,5} \\ M_{5,1} & M_{5,2} & M_{5,3} & M_{5,4} & M_{5,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -53 & -52 & 18 & 1 \\ -5 & -10 & -10 & 5 & 0 \\ 15 & 34 & 31 & -14 & 2 \\ -25 & -50 & -50 & 20 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Kofaktor & Kofaktormatrix / Komatrix ▶ 10

Definition (Kofaktor, Kofaktormatrix)

Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,k})$.

Dann nennt man für jedes Paar $(i,k) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ den Wert

$$\tilde{a}_{i,k} = (-1)^{i+k} \cdot M_{i,k} \quad \text{mit Minor } M_{i,k}$$

den *Kofaktor (oder Cofaktor) zum Element* $a_{i,k}$ *der Matrix* A.

Die aus den Kofaktoren gebildete $n \times n$-Matrix mit

$$\mathrm{Cof}(A) := \tilde{A} := \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \tilde{a}_{1,2} & \dots & \tilde{a}_{1,n} \\ \tilde{a}_{2,1} & \tilde{a}_{2,2} & \dots & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n,1} & \tilde{a}_{n,2} & \dots & \tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix}$$

heißt *Kofaktormatrix* (auch *Komatrix* oder *Comatrix*).

Bemerkungen: ▶ 11

- Es ist $\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} +M_{1,1} & -M_{1,2} & +M_{1,3} & \dots \\ -M_{2,1} & +M_{2,2} & -M_{1,3} & \dots \\ +M_{3,1} & -M_{3,2} & +M_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\lvert A_{1,1}\rvert & -\lvert A_{1,2}\rvert & +\lvert A_{1,3}\rvert & \dots \\ -\lvert A_{2,1}\rvert & +\lvert A_{2,2}\rvert & -\lvert A_{1,3}\rvert & \dots \\ +\lvert A_{3,1}\rvert & -\lvert A_{3,2}\rvert & +\lvert A_{3,3}\rvert & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

- Zur Bestimmung der Vorzeichen $(-1)^{i+k}$, d.h. „-1 hoch (Zeile plus Spalte)" empfiehlt sich die Verwendung des „Schachbrettmusters"

$$\begin{matrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

- Es gilt: ▶ 12

Laplacescher Entwicklungssatz

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot \tilde{a}_{i,k} \quad \text{für beliebiges } i \in \{1,\dots,n\} \quad \dots \text{ nach Zeile } i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot \tilde{a}_{i,k} \quad \text{für beliebiges } k \in \{1,\dots,n\} \quad \dots \text{ nach Spalte } k$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiel: ▶ 13

$$\text{zu} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

ergibt sich:

$$\text{Cof}(A) = \tilde{A} = \begin{pmatrix} +M_{1,1} & -M_{1,2} & +M_{1,3} & -M_{1,4} & +M_{1,5} \\ -M_{2,1} & +M_{2,2} & -M_{2,3} & +M_{2,4} & -M_{2,5} \\ +M_{3,1} & -M_{3,2} & +M_{3,3} & -M_{3,4} & +M_{3,5} \\ -M_{4,1} & +M_{4,2} & -M_{4,3} & +M_{4,4} & -M_{4,5} \\ +M_{5,1} & -M_{5,2} & +M_{5,3} & -M_{5,4} & +M_{5,5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (+1)\cdot(-30) & (-1)\cdot(-53) & (+1)(-52) & (-1)(18) & (+1)(1) \\ (-1)(-5) & (+1)(-10) & (-1)(-10) & (+1)(5) & (-1)(0) \\ (+1)(15) & (-1)(34) & (+1)(31) & (-1)(-14) & (+1)(2) \\ (-1)(-25) & (+1)(-50) & (-1)(-50) & (+1)(20) & (-1)(0) \\ (+1)(5) & (-1)(5) & (+1)(5) & (-1)(0) & (+1)(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -30 & 53 & -52 & -18 & 1 \\ 5 & -10 & 10 & 5 & 0 \\ 15 & -34 & 31 & 14 & 2 \\ 25 & -50 & 50 & 20 & 0 \\ 5 & -5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zusatz: Laplacescher Entwicklungssatz ▶ 14

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad \text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -30 & 53 & -52 & -18 & 1 \\ 5 & -10 & 10 & 5 & 0 \\ 15 & -34 & 31 & 14 & 2 \\ 25 & -50 & 50 & 20 & 0 \\ 5 & -5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nach Zeile 3: $0\cdot 15 + (-1)\cdot(-34) + (-1)\cdot 31 + 0\cdot 14 + 1\cdot 2 = 34 - 31 + 2 = \boxed{5} = \det(A)$

nach Zeile 4: $-1\cdot 25 + 2\cdot(-50) + 3\cdot 50 + (-1)\cdot 20 + 2\cdot 0 = -25 - 100 + 150 - 20 = \boxed{5} = \det(A)$

nach Spalte 2: $2\cdot 53 + 2(-10) + (-1)\cdot(-34) + 2\cdot(-50) + 3(-5) = 106 - 20 + 34 - 100 - 15 = \boxed{5} = \det(A)$

Dr. rer. nat. M. Strieker

- **Adjunkte** ▶ 15

Definition (Adjunkte)

Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,k})$.

Dann nennt man die Transponierte der Kofaktormatrix von A die *Adjunkte* $adj(A)$ *von* A, d. h. es ist

$$\text{adj}(A) = (\text{Cof}(A))^T = \tilde{A}^T$$

Bemerkungen

▶ 16 • Es ist $$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \tilde{a}_{1,2} & \dots & \tilde{a}_{1,n} \\ \tilde{a}_{2,1} & \tilde{a}_{2,2} & \dots & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n,1} & \tilde{a}_{n,2} & \dots & \tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \tilde{a}_{2,1} & \dots & \tilde{a}_{n,1} \\ \tilde{a}_{1,2} & \tilde{a}_{2,2} & \dots & \tilde{a}_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1,n} & \tilde{a}_{2,n} & \dots & \tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix}$$

⚠ Das Element in Zeile i und Spalte k der Adjunkten ist die mit $(-1)^{i+k}$ multiplizierte Determinante der Untermatrix $A_{k,i}$, d.h. der Untermatrix die sich durch Streichung der Zeile k und Spalte i ergibt

d.h. mit $$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

ist $p_{i,k} = \tilde{a}_{k,i} = (-1)^{k+i} \cdot M_{k,i} = (-1)^{i+k} \cdot \det(A_{k,i})$

Transponieren

Beispiel

i) mit $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ & $$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -30 & 53 & -52 & -18 & 1 \\ 5 & -10 & 10 & 5 & 0 \\ 15 & -34 & 31 & 14 & 2 \\ 25 & -50 & 50 & 20 & 0 \\ 5 & -5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ▶ 17

ist $$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -30 & 5 & 15 & 25 & 5 \\ 53 & -10 & -34 & -50 & -5 \\ -52 & 10 & 31 & 50 & 5 \\ -18 & 5 & 14 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

ii) mit $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ▶ 18

und $\operatorname{adj}(B) = (p_{i,k}) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ist

- $p_{3,2} = (-1)^{2+3} \cdot \det(B_{2,3}) = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-6) = 6$

- $p_{5,1} = (-1)^{1+5} \cdot \det(B_{1,5}) = (-1)^6 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = +1 \cdot (-86) = -86$

▶ 19 • alternativ genutzte Namen für „Adjunkte“:

- deutsch: klassische Adjungierte, Komplementäre Matrix

↑ Verwechslungsgefahr mit Adjungierte: $A^H = \overline{A}^T$ (elementweise komplex konjugiert)

- englisch: adjugate, adjunct matrix, adjoint

Dr. rer. nat. M. Striebel

Bestimmung der Inversen von A

▶ 20

Satz (Inverse einer Matrix mit Hilfe der Adjunkten)

Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix A.

Falls A regulär, d. h. invertierbar, ist, dann gilt

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

▶ 21 **Beispiel**

für $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ist

- $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -30 & 5 & 15 & 25 & 5 \\ 53 & -10 & -34 & -50 & -5 \\ -52 & 10 & 31 & 50 & 5 \\ -18 & 5 & 14 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\det(A) = 5$

somit: $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -30 & 5 & 15 & 25 & 5 \\ 53 & -10 & -34 & -50 & -5 \\ -52 & 10 & 31 & 50 & 5 \\ -18 & 5 & 14 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 53/5 & -2 & -34/5 & -10 & -1 \\ -52/5 & 2 & 31/5 & 10 & 1 \\ -18/5 & 1 & 14/5 & 4 & 0 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

▶ 22 **Schlußbemerkung:**

⚠ Da die Berechnung einer Determinanten sehr viele Rechenoperationen erfordert und bei einer $n \times n$ - Matrix $n \cdot n + 1 = n^2 + 1$ Determinanten berechnet werden müssten um über $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$ zur Inversen zu gelangen sollte man diesen Ansatz nur in Ausnahmefällen benutzen

↑ z.B. wenn wenige Elemente von A^{-1} gezielt gesucht sind

Dr. rer. nat. M. Striebel