Algorithmisches Vorgehen zur Lösung des speziellen linearen Optimierungsproblems

▶ 1

$$(*)\quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & A\vec{x} \le \vec{b} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

mit $\mathcal{M} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} \le \vec{b} \wedge \vec{x} \ge \vec{0}\}$ ist gesucht:

- $F_{max} = \max\{F(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathcal{M}\} \in \mathbb{R}$
- $\vec{x}_{opt} \in \mathcal{M} : F(\vec{x}_{opt}) = F_{max}$

bei gegebenem $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{b} \ge \vec{0}$ und $\vec{b} \ne \vec{0}$

▶ 2 (Vorstellung Grobstruktur des Algorithmus)

$\boxed{0.}$ Vorbereitung: Aufstellung des Start-Simplextableaus in kanonischer Normalform

▶ 3

– Erweitere unter Beibehaltung des Namens:

- Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij}) := (A, E_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$

- Begrenzungsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} := \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

- Vektor der Zielfunktionskoeffizienten

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{0}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \quad \text{mit Nullvektor } \vec{0}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

- Vektor der Unbekannten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \quad \text{mit } \vec{x}_S := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ „Vektor der Schlupfvariablen"}$$

– initialisiere

- Zielfunktionswert $z = 0$

- Vektor der Basis-Indices: $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T := (n+1, \dots, n+m)^T \in \{1, 2, \dots, n+m\}^m$

- Simplextableau

$$T := \left(\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \\ \hline -\vec{c}^{\,T} & z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1,m+n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m+n} & b_m \\ \hline -c_1 & \dots & -c_{m+n} & z \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+m+1)}$$

A-Block b-Block
c-Block F-Block

$$= \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & & 0 & & b_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & & 1 & & b_m \\ \hline -c_1 & \dots & -c_n & 0 & \dots & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Startwerte

Beginn der Iteration – Primaler Simplexalgorithmus ▶ 4

I. Überprüfung auf mögliche Tableau-Verbesserungen ▶ 5

bestimme $-\hat{c} := \min\{-c_p \mid p \notin \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}\}$

falls $\boxed{-\hat{c} \geq 0}$ (d.h. falls kein negativer Wert im c-Block) ▶ 6

- Tableau kann nicht verbessert werden
- maximaler Zielfunktionswert $F_{max} = z$

- Frage: gibt es $p \notin \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$: $-c_p = 0$?

falls **nein** : (d.h. $-c_p > 0 \;\forall p \notin \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$)

- Lösung ist eindeutig, d.h. $\exists!\, \vec{x}_{opt}$: $F(\vec{x}_{opt}) = F_{max}$

- Abbruch der Iteration:
  - Abbruchtyp (1)
  - weiter zu Schritt $\boxed{VI}$

falls **ja** (d.h. $\exists\, p \notin \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$: $-c_p = 0$)

- Lösung nicht eindeutig, d.h. es gibt mehrere $\vec{x}_{opt}$ mit $F(\vec{x}_{opt}) = F_{max}$

- Abbruch der Iteration:
  - Abbruchtyp (2)
  - weiter zu Schritt $\boxed{VI}$

II. Bestimmung eines Pivoelements a_{ik} ▶ 7

Vorgestellt wird eine einfach zu implementierende Variante zur Bestimmung eines Pivotelements
Es gibt viele weitere Varianten, die sich in Rechenaufwand, Genauigkeit, Stabilität unterscheiden
(was insbesondere für große Probleme interessant ist, d.h. bei $n \gg 1$, $m \gg 1$)

- Bestimmung der Pivotspalte k ▶ 8

$$k = \min\{p \notin \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \mid -c_p = -\hat{c}\}$$

wähle als Pivotspalte die erste Spalte, in der die minimale Wert $-\hat{c}$ angenommen wird

- Bestimmung der Pivotzeile i (zur Pivotspalte k) ▶ 9

Frage: gibt es $q \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{qk} > 0$? (enthält die Pivotspalte im A-Block mindestens einen positiven Wert?)

falls **nein** :

- Wert der Zielfunktion ist nach oben unbeschränkt
- es gibt keine optimale Lösung

- Abbruch der Iteration:
  - Abbruchtyp (3)
  - weiter zu Schritt $\boxed{VI}$

falls $\boxed{\text{ja}}$:

▶ 10

a) bestimme $\gamma := \min \left\{ \frac{b_q}{a_{qk}} \;\middle|\; q \in \{1,..,m\} \text{ mit } a_{qk} > 0 \right\}$

d.h. bestimme das Minimum der Quotienten der Werte des b-Blockes und der Werte der k-ten Spalte / der Pivotspalte für alle Zeilen für die der Wert in der Pivotspalte positiv ist

b) Wahl der Pivotzeile:

$$i = \min \left\{ q \in \{1,..,m\} \;\middle|\; \frac{b_q}{a_{qk}} = \gamma \text{ mit } a_{qk} > 0 \right\}$$

wähle als Pivotzeile die erste Zeile, in der der Quotient $\frac{b_q}{a_{qk}}$ den minimalen Wert γ annimmt

$\boxed{\text{III}}$ Transformation des Simplextableaus zur Pivotspalte k und Pivotzeile i

▶ 11

Mit Hilfe der EZUen „Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen" und „Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl" das Tableau so transformiert, dass die k-te Spalte zum i-ten Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^{m+1}$ wird

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n+m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n+m} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n+m} & b_m \\ \hline -c_1 & \cdots & -c_k & \cdots & -c_{n+m} & z \end{array}\right) \overset{\text{EZU}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} \tilde{a}_{11} & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{a}_{1n+m} & \tilde{b}_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & \tilde{a}_{i,n+m} & \tilde{b}_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{m,1} & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{a}_{m,n+m} & \tilde{b}_m \\ \hline -\tilde{c}_1 & \cdots & 0 & \cdots & -\tilde{c}_{n+m} & \tilde{z} \end{array}\right)$$

$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^{m+1}$

Algorithmisch ist die Transformation nach Durchführung der folgenden Schritte abgeschlossen

- für alle $q \in \{1,...,m\} \setminus \{i\}$ d.h. $q \in \{1,..,m\}$ mit $q \neq i$

  addiere das $\left(-\frac{a_{qk}}{a_{ik}}\right)$ - Fache der i-ten zur q-ten Zeile
- addiere das $\left(-\frac{-c_k}{a_{ik}}\right)$-Fache der i-ten Zeile zur (m+1)-ten Zeile (zur letzten Zeile)
- multipliziere die i-te Zeile mit $\frac{1}{a_{ik}}$

$\boxed{\text{IV}}$ Anpassung des Vektors der Basisindizes

▶ 12

setze in $\vec{\beta}$: $\beta_i = k$

$\boxed{\text{V}}$ weiter mit Schritt $\boxed{\text{I}}$

▶ 13

$\boxed{\text{Ende der Iteration}}$

$\boxed{\text{VI}}$ Nachbereitung – Bestimmung von $\vec{x}_{opt}$

▶ 14

falls Abbruchtyp ① ▶ 15

- in $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$

  Setze $x_{\beta_1} = b_1,\ x_{\beta_2} = b_2, \dots, x_{\beta_m} = b_m$ & $x_\nu = 0 \quad \forall \nu \in \{1,\dots,n+m\} \setminus \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$

- in ⊛ ist $\vec{x}_{opt} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

falls Abbruchtyp ② ▶ 16

- eine optimale Lösung $\vec{x}_{opt,1}$ ergibt sich aus dem aktuellen Tableau T und dem aktuellen Basis-Index-Vektor $\vec{\beta}$ wie unter ① beschrieben, d.h.

  - in $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$

    Setze $x_{\beta_1} = b_1,\ x_{\beta_2} = b_2, \dots, x_{\beta_m} = b_m$ & $x_\nu = 0 \quad \forall \nu \in \{1,\dots,n+m\} \setminus \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$

  - in ⊛ ist $\vec{x}_{opt,1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- weitere optimale Lösungen ergeben sich durch Transformation (ohne Verbesserung) des aktuellen Tableaus T und des aktuellen Basis-Index-Vektors $\vec{\beta}$:

  - bestimme $\mathcal{P} := \{ p \notin \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \ : -c_p = 0 \}$ ← Menge aller Nicht-Basis-Spalten im c-Block mit $-c_p = 0$

  - für $\ell = 1, 2, \dots, |\mathcal{P}|$:

    - Setze als „lokales" Tableau $\hat{T} := T$ ← gehe im Weiteren immer von der Situation aus, in der Abbruchtyp ② identifiziert wurde

    - Setze als „lokalen" Vektor der Basis-Indices $\hat{\vec{\beta}} := \vec{\beta}$

    - Wähle als Pivotspalte $k := p_\ell$

    - Bestimme wie unter $\boxed{\text{II.}}$ beschrieben eine Pivotzeile i zur Pivotspalte k $(= p_\ell)$

      a) bestimme $\gamma := \min \left\{ \frac{b_q}{a_q} \ \middle|\ q \in \{1,\dots,m\} \text{ mit } a_{qk} > 0 \right\}$

      b) Wahl der Pivotzeile:

      $$i = \min \left\{ q \in \{1,\dots,m\} \ \middle|\ \frac{b_q}{a_{qk}} = \gamma \text{ mit } a_{qk} > 0 \right\}$$

    - Transformiere das lokale Tableau $\hat{T}$ zur Pivotspalte k $(= p_\ell)$ und Pivotzeile i wie unter $\boxed{\text{III}}$ beschrieben

    - passe den lokalen Vektor der Basis-Indices $\hat{\vec{\beta}}$ wie in $\boxed{\text{IV}}$ beschrieben an

      Setze in $\hat{\vec{\beta}}$: $\hat{\beta}_i = k$ $(= p_\ell)$

    - eine optimale Lösung $\vec{x}_{opt,\ell+1}$ ergibt sich aus dem aktuellen Tableau $\hat{T}$ und dem aktuellen Basis-Index-Vektor $\hat{\vec{\beta}}$ wie unter ① beschrieben, d.h.

      - in $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$

        Setze $x_{\hat{\beta}_1} = \hat{b}_1,\ x_{\hat{\beta}_2} = \hat{b}_2, \dots, x_{\hat{\beta}_m} = \hat{b}_m$ & $x_\nu = 0 \quad \forall \nu \in \{1,\dots,n+m\} \setminus \{\hat{\beta}_1,\dots,\hat{\beta}_m\}$

      - in ⊛ ist $\vec{x}_{opt,\ell+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- Interpretation:

  mit den bestimmten Vektoren $\vec{x}_{opt,1}, \vec{x}_{opt,2}, \dots, \vec{x}_{opt,|\mathcal{P}|+1}$ ist jede

  ▶ 17

  Konvex Kombination

  $$\vec{\hat{x}}_{opt} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_{opt,1} + \lambda_2 \cdot \vec{x}_{opt,2} + \dots + \lambda_{|\mathcal{P}|+1} \cdot \vec{x}_{opt,|\mathcal{P}|+1}$$

  $$\forall \{\lambda_1, \dots, \lambda_{|\mathcal{P}|+1}\} \text{ mit } \lambda_i \in [0,1] \ \forall\, i \in \{1, \dots, |\mathcal{P}|+1\} \text{ und } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{|\mathcal{P}|+1} = 1$$

  dieser Vektoren eine optimale Lösung, d.h. $F(\vec{\hat{x}}_{opt}) = F_{max}$

falls Abbruchtyp ③: ▶ 18

- Problem ⊛ nicht lösbar, F ist nach oben nicht beschränkt
- Es gibt keinen optimalen Vektor $\vec{x}_{opt}$
- Formal könnte man setzen: $F_{max} = \infty$, $\vec{x}_{opt}$ undefiniert

▶ 19 (Abschlussbemerkungen)