Lösung linearer Optimierungsprobleme in allgemeiner Standardform

Erinnerung:

- LP in Standardform besitzt die Darstellung ▶ 1

$$\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{u.d.N. } A\vec{x} \leq \vec{b} \\ \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- Der (primale) Simplex-Algorithmus verlangt $\vec{b} \geq \vec{0}$ ▶ 2 im Video: Erklärung, warum)
- jedes LP kann durch ein LP in Standardform dargestellt werden. ▶ 3

↳ **Beispiel**

$$\begin{cases} \text{maximiere } F(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N. } 3x_1 + x_2 \geq 6 \quad (1) \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 6 \quad (3) \\ x_1 + 7x_2 \geq 12 \quad (4) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$ ▶ 4

grafische Repräsentation:

- NB (1): $3x_1 + x_2 \geq 6 \Leftrightarrow x_2 \geq -3x_1 + 6$

  zugeh. Grenzgerade $g_1: x_2 = -3x_1 + 6$

- NB (2): $-x_1 + x_2 \leq 2 \Leftrightarrow x_2 \leq x_1 + 2$

  zugeh. Grenzgerade: $g_2: x_2 = x_1 + 2$

- NB (3): $x_1 + x_2 \leq 6 \Leftrightarrow x_2 \leq -x_1 + 6$

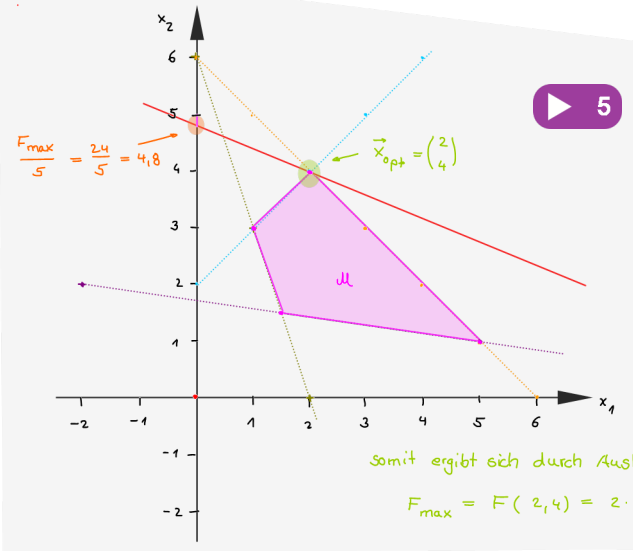
  zugeh. Grenzgerade: $g_3: x_2 = -x_1 + 6$

- NB (4): $x_1 + 7x_2 \geq 12 \Leftrightarrow x_2 \geq -\frac{1}{7}x_1 + \frac{12}{7}$

  zugeh. Grenzgerade: $g_4: x_2 = -\frac{1}{7}x_1 + \frac{12}{7}$

↳ für $x_1 = -2$: $x_2 = -\frac{1}{7}(-2) + \frac{12}{7} = \frac{14}{7} = 2 \rightsquigarrow (-2|2)$

für $x_1 = 5$: $x_2 = -\frac{1}{7} \cdot 5 + \frac{12}{7} = \frac{7}{7} = 1 \rightsquigarrow (5|1)$



▶ 5

mit: $F(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$

ist $\mathcal{F}_z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid F(x_1, x_2) = z \}$

$= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1 + 5x_2 = z \}$

$= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 = -\frac{2}{5}x_1 + \frac{z}{5} \}$

insb. $\mathcal{F}_0 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 = -\frac{2}{5}x_1 \}$

somit ergibt sich durch Auslesen von $\vec{x}_{opt} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$F_{max} = F(2,4) = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 4 + 20 = 24$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Formales Vorgehen – Überführung in Standardform

▶ 6

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.} & 3x_1 + x_2 \geq 6 \quad (1) \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2) \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \quad (3) \\ & x_1 + 7x_2 \geq 12 \quad (4) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(2), (3) sind bereits in der geforderten Form „ ≤ "

Umformulierung von (1):

$$3x_1 + x_2 \geq 6 \quad \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} \quad -3x_1 - x_2 \leq -6 \quad (1')$$

Umformulierung von (4):

$$x_1 + 7x_2 \geq 12 \quad \overset{(-1)}{\Leftrightarrow} \quad -x_1 - 7x_2 \leq -12 \quad (4')$$

man erhält so ein LP in Standardform:

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.} & -3x_1 - x_2 \leq -6 \quad (1') \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2) \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \quad (3) \\ & -x_1 - 7x_2 \leq -12 \quad (4') \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

mit $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

▶ 7 wegen $\vec{b} \not\geq \vec{0}$ kann man dieses Problem nicht mit dem primalen Simplex-Algorithmus lösen!

Wenn man es doch versuchen würde, ergäbe sich als Start-Simplex-Tableau:

$$T = \left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ \hline -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

mit $\beta = (3,4,5,6)^T$

▶ 8

zugehörige Basislösung: $\vec{x}^{\,\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

← Lösung des zugeh. LP in kanonischer Normalform

maximiere $2x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

u.d.N. $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$

← aber keine zulässige Lösung (erfüllt nicht die Bedingung $\vec{x} \geq \vec{0}$)

zugeh. Strukturvariable $\binom{0}{0} \notin M$

▶ 9 (im Video: Problem & Idee)

Dr. rer. nat. M. Strieber

Der primale Simplex-Algorithmus kann zur Bestimmung der optimalen Lösung eines LPs in Standardform herangezogen werden, wenn das zugehörige Starttableau primal zulässig ist

Definition (primale Zulässigkeit)

Man nennt ein Simplex-Tableau in kanonischer Normalform *primal zulässig*, wenn alle Eintragungen im b-Block nicht-negativ sind, d. h. wenn $b_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

▶ 10

Dualer Simplex – zur Bestimmung einer zulässigen Lösung

▶ 11

Ist das Simplex-Tableau zu einem LP in kanonischer Normalform nicht primal zulässig, so kann mit Hilfe des dualen Simplex eine zulässige Basislösung bestimmt werden (falls eine solche existiert). Im Anschluss kann mit der zugehörigen Formulierung des LPs in kanonischer Normalform eine optimale Lösung mit Hilfe des primalen Simplex-Verfahrens gesucht werden.

0. Voraussetzung:

▶ 12

primal nicht zulässiges Simplex-Tableau zu einem LP in Standardform in kanonischer Normalform mit zugehörigem Vektor $\vec{\beta}$ der Basisindizes

- $T := \left(\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \\ \hline -\vec{c}^T & z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m+n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m+n} & b_m \\ \hline -c_1 & \cdots & -c_{m+n} & z \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+m+1)}$

A-Block b-Block c-Block F-Block

$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 & b_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & & 1 & b_m \\ \hline -c_1 & \cdots & -c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$ ← Startwerte

mit: $\exists\, b_\nu \in \{b_1, \ldots, b_m\} : b_\nu < 0$

- $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^T := (n+1, \ldots, n+m)^T \in \{1, 2, \ldots, n+m\}^m$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beginn der Iteration – Dualer Simplexalgorithmus

I Überprüfung auf primale Zulässigkeit:

▶ 13

falls $b_i \geq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, m\}$:

Tableau ist primal zulässig

- Abbruch Typ (a)
- weiter zu Schritt VI

II Bestimmung des Pivotelements a_{ik}

▶ 14

- Bestimmung der Pivotzeile i

▶ 15

mit $\hat{b} := \min \{ b_1, \dots, b_m \}$

wähle $i = \min \{ \nu \in \{1, \dots, m\} \mid b_i = \hat{b} \}$

← wähle als Pivotzeile die erste Zeile in der der kleinste aller b-Werte, $\hat{b}$, zu finden ist.

- Bestimmung der Pivotspalte k zur Pivotzeile i

▶ 16

Frage: gibt es ein $q \in \{1, \dots, n+m\} : a_{iq} < 0$?

(enthält die Pivotzeile im A-Block mindestens einen negativen Wert?)

falls nein :

Das Problem besitzt keine zulässige Basislösung
d.h. $\mathcal{M} = \emptyset$

- Abbruch Typ (b)
- weiter zu Schritt VI

falls ja :

a) bestimme $\delta := \max \left\{ \frac{-c_q}{a_{iq}} \mid q \in \{1, \dots, n+m\} \text{ mit } a_{iq} < 0 \right\}$

↑ d.h. bestimme das Maximum der Quotienten der Werte des c-Blockes und der Werte der i-ten Spalte / der Pivotzeile für alle Spalten, für die der Wert in der Pivotzeile des A-Blocks negativ ist.

b) Wahl der Pivotspalte:

$$k := \min \left\{ q \in \{1, \dots, n+m\} \mid \frac{-c_q}{a_{iq}} = \delta \text{ mit } a_{iq} < 0 \right\}$$

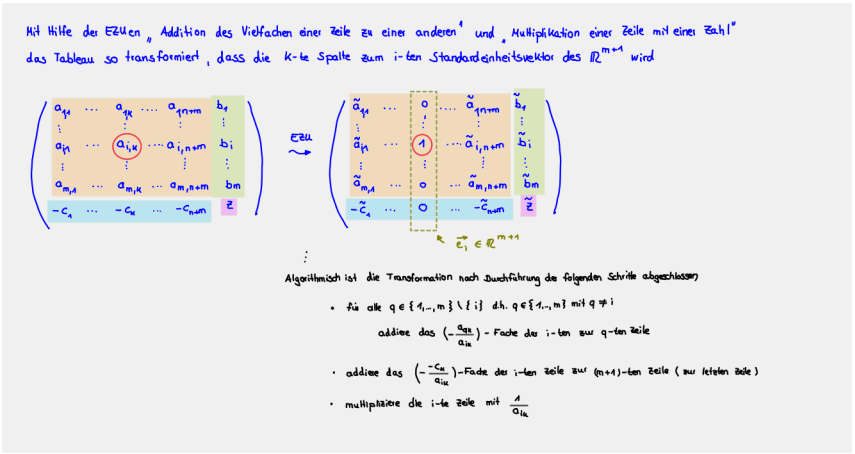
↑ wähle als Pivotspalte erste Spalte in der der Quotient $\frac{-c_q}{a_{iq}}$ den minimalen Wert δ annimmt

Dr. rer. nat. M. Striebel

III Transformation des Simplextableaus zur Pivotspalte k und Pivotzeile i

▶ 17

gleiches Vorgehen wie beim primalen Simplex:



IV Anpassung des Vektors der Basisindizes

▶ 18

gleiches Vorgehen wie beim primalen Simplex:

setze in $\vec{\beta}$: $\beta_i = k$

V weiter mit Schritt I

Ende der Iteration

VI Nachbereitung – Bestimmung einer zulässigen Basislösung und Ecke von M (bzgl. Standardform)

▶ 19

falls Abbruchtyp (a)

- in $\vec{x} = (x_1,\dots,x_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ wie beim primalen Simplex

  Setze $x_{\beta_1} = b_1,\ x_{\beta_2} = b_2,\dots,\ x_{\beta_m} = b_m$ & $x_\nu = 0\ \forall \nu \in \{1,\dots,n+m\} \setminus \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$

  damit ist $\vec{x}$ eine zulässige Basislösung
- mit $\hat{\vec{x}} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $\hat{\vec{x}}$ eine zulässige Lösung des LPs in Standardform
- das erreichte Tableau dient dann als Starttableau des primalen Simplex

falls Abbruchtyp (b)

- es gibt keine zulässige Basislösung
- das LP ist nicht lösbar, da sich die NBen widersprechen
- der primale Simplex kann nicht durchgeführt werden

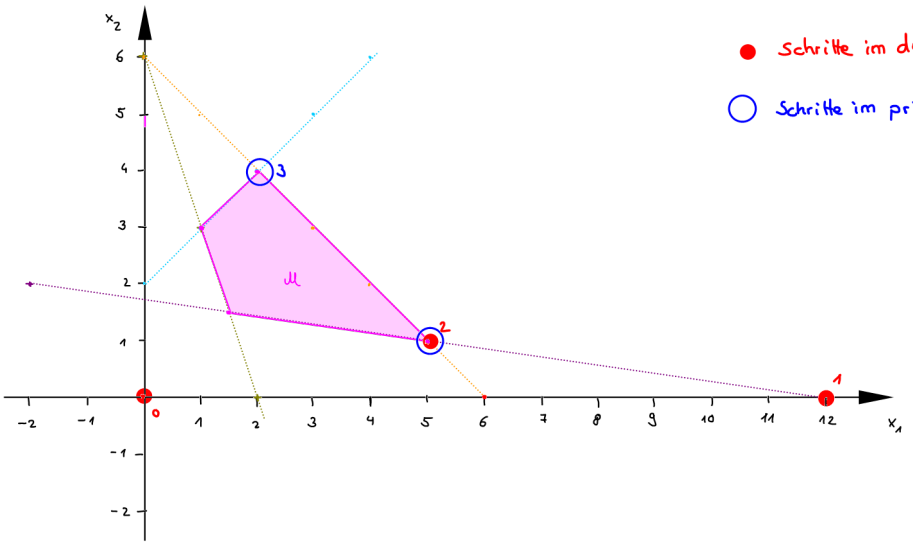
Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiel

▶ 20

$$\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N. } A\vec{x} \le \vec{b} \\ \qquad \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

mit $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$



Dualer Simplex

▶ 21

nicht primal zulässiges Tableau

k = 1 Pivotspalte

$$T = \left(\begin{array}{cccccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ \hline -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \hat{b} = -12, \; i = 4 \text{ (Pivot zeile)}$$

$\delta = 2$

-3, -1, $-2 \;|\cdot(-1)$

mit $\vec{\beta} = (3,4,5,6)^T$

zugeh. Basislösung: $\vec{x}^{\beta} = (0,0,-6,2,6,-12)^T$

davon Strukturvariablen: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

nicht primal zulässiges Tableau

▶ 22

Pivotspalte k = 2

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 20 & 1 & 0 & 0 & -3 & 30 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 0 & -1 & 14 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12 \\ \hline 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -2 & 24 \end{array}\right) \quad \hat{b}, \; i = 3 \text{ Pivotzeile}$$

$\frac{20}{6} = \frac{10}{3}$, $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{9}{6} = \frac{3}{2} \;|\cdot(-\frac{1}{6})$

$\delta = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$

mit $\vec{\beta} = (3,4,5,1)^T$

zugeh. Basislösung: $\vec{x}^{\beta} = (12, 0, 30, 14, -6, 0)^T$

davon Strukturvariablen $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 10/3 & 1/3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7/6 & 1/6 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 15 \end{array}\right)$$

primal zulässig

▶ 23

mit $\vec{\beta} = (3,4,2,1)^T$

zugeh. Basislösung: $\vec{x}^{\beta} = (5,1,10,6,0,0)^T$ — zulässige Basislösung mit $F(\vec{x}^{\beta}) = 15$

davon Strukturvariablen $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

somit: weiter mit Primaler Simplex

▶ 24

Starttableau

Pivotspalte $k = 6$

Pivotzeile: $i = 2$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 10/3 & 1/3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7/6 & 1/6 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 15 \end{array}\right)$$

$\frac{10}{1/3} = 30$, $\frac{6}{1/3} = 18 = \delta$, $\frac{5}{1/6} = 30$

-1, $-1/2$, $\frac{3}{2}$ $|\cdot 3$

$-\hat{c}$

▶ 25

mit $\vec{\beta} = (3,4,2,1)^T$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3/2 & 7/2 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

▶ 26

mit $\vec{\beta} = (3,6,2,1)^T$

nur positive Werte

d.h. keine Tableauverbesserung

zugeh. Basislösung: $\vec{x}^{\beta} = (2,4,4,0,0,18)^T$

somit: $F_{max} = 24$

davon Strukturvariablen $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

somit eindeutige optimale Lösung: $\vec{x}_{opt} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ zug. Schlupfvariablen: $\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$

mit $F_{max} = 24$ $\left(= (2,5)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 4 + 20 = 24 \right)$

Dr. rer. nat. M. Striebel