Die kanonische Normalform

▶ 2

▶ 1 nur im Video: Zielsetzung

bekannt: Standardform

$$\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN. } A\vec{x} \leq \vec{b} \\ \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

mit gegebenen $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit i.A. $n \gg m$

Da „$\leq$"-Beziehungen schwer zu kontrollieren sind überführt man LPs in Standardform in LPs in Normalform:

Definition (lineares Optimierungsproblem in Normalform)

Mit gegebenem

- *Vektor der Zielfunktionskoeffizienten* $\vec{c} \in \mathbb{R}^q$
- *Koeffizientenmatrix* $A \in \mathbb{R}^{m\times q}$
- *Begrenzungsvektor* $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

nennt man

$$\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} \\ \quad A\vec{x} = \vec{b} \\ \quad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases} \qquad (\star)$$

Vorteil: LGS

die *Normalform eines LPs* für den *Vektor der Unbekannten* $\vec{x} \in \mathbb{R}^q$.

Überführung: Standardform $\longrightarrow$ Normalform

▶ 3

Standardform in komponentenweiser Notation:

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1,\dots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_n\cdot x_n \\ \text{udN.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Es gilt:

$\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)^T$ ist Lösung des LPs in Standardform

$\Leftrightarrow$ $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ gilt: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$

$\Leftrightarrow$ $\forall i \in \{1,\dots,m\}\ \exists\, x_{s,i} \geq 0$: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{s_i} = b_i$

d.h. $x_{s,i} = b_i - (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) \geq 0$

▶ 4

$\Leftrightarrow$ $\exists\, x_{s,1}, x_{s,2}, \dots, x_{s,m} \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1\cdot x_{s,1} \qquad\qquad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \qquad 1\cdot x_{s,2} \qquad &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + \qquad\qquad 1\cdot x_{s,m} &= b_m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, x_{s,1}, x_{s,2}, \ldots, x_{s,m} \geq 0 :$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{s,1} \\ x_{s,2} \\ \vdots \\ x_{s,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \vec{x}_s = (x_{s,1}, \ldots, x_{s,m})^T \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \vec{x}_s \geq \vec{0} :$$

$$(A, E_m) \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_s \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Somit ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ eine zulässige Lösung des LPs in Standardform

▶ 5

$$\Leftrightarrow \left(\exists\, \vec{x}_s \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^m : (A, E_m) \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_s \end{pmatrix} = \vec{b}\right) \wedge \left(\vec{x} \geq \vec{0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \vec{x}_s \in \mathbb{R}^m : (A, E_m) \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_s \end{pmatrix} = \vec{b} \quad \text{mit } \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_s \end{pmatrix} \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

zur Zielfunktion:

Wegen: $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0 \cdot x_{s,1} + 0 \cdot x_{s,2} + \ldots + 0 \cdot x_{s,m}$

kann man schreiben: $F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{x} = (\vec{c}^{\,T}, \vec{0}^{\,T}) \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_s \end{pmatrix}$

Mit

- Koeffizientenmatrix: $\tilde{A} = (A, E_m)$ $E_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ▶ 6
- Begrenzungsvektor: $\tilde{\vec{b}} = \vec{b}$
- Vektor der Zielfunktionskoeffizienten: $\tilde{\vec{c}} = \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{0}_m \end{pmatrix}$ $\vec{0}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$
- Vektor der Unbekannten: $\tilde{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_s \end{pmatrix}$ mit $\vec{x}_s = \begin{pmatrix} x_{s,1} \\ \vdots \\ x_{s,m} \end{pmatrix}$

erhalten wir das äquivalente LP in Normalform:

$$\begin{cases} \text{maximiere} & \tilde{F}(\tilde{\vec{x}}) = \tilde{\vec{c}}^{\,T} \cdot \tilde{\vec{x}} \\ \text{udN.} & \tilde{A} \cdot \tilde{\vec{x}} = \tilde{\vec{b}} \\ & \tilde{\vec{x}} \geq \vec{0} \end{cases} \qquad \text{mit } \tilde{\vec{c}} \in \mathbb{R}^{n+m},\ \tilde{\vec{b}} \in \mathbb{R}^m,\ \tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$$

ausgehend vom LP in Standardform nennt man

- $\vec{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ Vektor der Strukturvariablen
- $\vec{x}_s = (\tilde{x}_{n+1}, \ldots, \tilde{x}_{n+m})^T$ Vektor der Schlupfvariablen

▶ 7

Wird ein spezielles ($\vec{b} \geq \vec{0}$) Standardform-LP wie dargestellt in ein Normalform-LP überführt, so entsteht ein LP in sog. kanonischer Normalform

▶ 8

Definition (Kanonische Normalform eines LPs)

Man sagt, ein LP in Normalform ($\star$) ist in *kanonischer Normalform* gegeben, wenn

i.) $\vec{b} \geq \vec{0}$

ii.) sich in m Spalten von $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_q)$ alle Standardeinheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$ des $\mathbb{R}^m$ finden lassen, d. h. wenn gilt

$$\exists \beta_1, \ldots, \beta_m \in \{1, \ldots, q\} : (\vec{a}_{\beta_1} = \vec{e}_1) \wedge \cdots \wedge (\vec{a}_{\beta_m} = \vec{e}_m)$$

iii.) $c_{\beta_1} = \cdots = c_{\beta_m} = 0$ für die Werte $\beta_1, \ldots, \beta_m$ aus ii.) mit $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_q)^T$

⚠ Der Simplex-Algorithmus erzeugt eine Abfolge von äquivalenten LPs in kanonischer Normalform, bei denen die Zielfunktion von einem zusätzlichen Koeffizienten Z in der Form $F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} + Z$ abhängt.

▶ 9

siehe auch ▶ 23

Beispiel: (Siehe OR-Exrcs-010)

▶ 10

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} \\ \text{u.d.N} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \\ 480 \\ 480 \end{pmatrix} \\ \qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

Definition (Kanonische Normalform eines LPs)

Man sagt, ein LP in Normalform ($\star$) ist in *kanonischer Normalform* gegeben, wenn

i.) $\vec{b} \geq \vec{0}$

ii.) sich in m Spalten von $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_q)$ alle Standardeinheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$ des $\mathbb{R}^m$ finden lassen, d. h. wenn gilt

$$\exists \beta_1, \ldots, \beta_m \in \{1, \ldots, q\} : (\vec{a}_{\beta_1} = \vec{e}_1) \wedge \cdots \wedge (\vec{a}_{\beta_m} = \vec{e}_m)$$

iii.) $c_{\beta_1} = \cdots = c_{\beta_m} = 0$ für die Werte $\beta_1, \ldots, \beta_m$ aus ii.) mit $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_q)^T$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 360 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 480 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 480 \\ \hline -2 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\vec{\beta}^T = (4, 5, 6, 7) \quad \text{mit } Z = 0$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 2/5 & 1/5 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 13/5 & 14/5 & 0 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 432 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 480 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 240 \end{array}\right)$$

$$\vec{\beta}^T = (3, 5, 6, 7) \quad \text{mit } Z = 240$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1/4 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & -1/20 & 24 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 1 & -7/10 & 96 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 120 \\ \hline 9/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3/4 & 600 \end{array}\right)$$

$$\vec{\beta}^T = (3, 5, 6, 2) \quad \text{mit } Z = 600$$

1. Vorteil der kanonischen Normalform :

es lässt sich ohne Rechnung eine zulässige Lösung angeben ▶ 11

mit $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ ist $\vec{x}^{\,\beta} = (x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_q^\beta)^T \in \mathbb{R}^q$

mit : $x^\beta_{\beta_1} = b_1 \,,\; x^\beta_{\beta_2} = b_2 \,, \dots,\; x^\beta_{\beta_m} = b_m \,,\; x_\nu = 0 \quad \forall\, \nu \in \{1,\dots,q\} \setminus \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$

eine zulässige Lösung , d.h. $A \cdot \vec{x}^{\,\beta} = \vec{b} \;\wedge\; \vec{x}^{\,\beta} \geq \vec{0}$

Beispiel

▶ 12

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 360 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 480 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 480 \\ \hline -2 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \vec{\beta}_1^{\,T} = (4, 5, 6, 7)$$

zugehörige Lösung : $\vec{x}^{\,\beta_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 240 \\ 360 \\ 480 \\ 480 \end{pmatrix}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 2/5 & 1/5 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 13/5 & 14/5 & 0 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 432 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 480 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 240 \end{array}\right) \qquad \vec{\beta}_2^{\,T} = (3, 5, 6, 7)$$

zugehörige Lösung : $\vec{x}^{\,\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 48 \\ 0 \\ 120 \\ 432 \\ 480 \end{pmatrix}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1/4 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & -1/20 & 24 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 1 & -7/10 & 96 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 120 \\ \hline 9/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3/4 & 600 \end{array}\right) \qquad \vec{\beta}_3^{\,T} = (3, 5, 6, 2)$$

zugehörige Lösung : $\vec{x}^{\,\beta_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 24 \\ 0 \\ 120 \\ 96 \\ 0 \end{pmatrix}$

Definition (Basisindizes, Basisvariablen, Basislösung) ▶ 13

Ist ein LP in kanonischer Normalform gegeben, so dass mit $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)^T$ gilt:

$$(\vec{a}_{\beta_1} = \vec{e}_1) \wedge \cdots \wedge (\vec{a}_{\beta_m} = \vec{e}_m),$$

dann nennt man

- die Werte $\beta_1, \ldots, \beta_m$ *Basisindizes* und die Werte $\nu_1, \ldots, \nu_{q-m}$ mit $\nu_\mu \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ *Nicht-Basis-Indizes* zu $\vec{\beta}$
- $\vec{x}^\beta = (x_1^\beta, \ldots, x_q^\beta)^T \in \mathbb{R}^q$
  $x_{\beta_i}^\beta = b_i$ für $i = 1, \ldots, m$ und $x_\nu^\beta = 0$ für alle $\nu \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$
  Basislösung zu $\vec{\beta}$
- $x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_m}$ *Basisvariablen* und $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_{q-m}}$ *Nicht-Basis-Variablen* zu $\vec{\beta}$

denn die Spalten $\beta_1, .., \beta_m$ von A bilden eine Basis von $\mathbb{R}^m$

Bemerkung: • Jede Basislösung stellt einen Eckpunkt der Menge der im LP zulässigen Lösungen dar. ▶ 14
- Keine Basislösung kann als echt konvexe Linearkombination anderer Basislösungen dargestellt werden.

2. Vorteil der kanonischen Normalform

Es lässt sich ohne Rechnung die Menge aller Lösungen von $A\vec{x} = \vec{b}$ angeben. ▶ 15

Vorgehen beispielhaft erklärt:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\
2/5 & 1/5 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 48 \\
-2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 120 \\
13/5 & 14/5 & 0 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 432 \\
3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 480 \\
\hline
0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 240
\end{array}$$

$\vec{\beta}^T = (3, 5, 6, 7)$

LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit 7 Unbekannten: $x_1, \ldots, x_7$ und $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 4$

d.h. $A\vec{x} = \vec{b}$ ist nicht eindeutig lösbar,
es können $7 - 4 = 3$ Unbekannte frei gewählt werden.

wir wählen frei: $x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 48 - \tfrac{2}{5}x_1 - \tfrac{1}{5}x_2 - \tfrac{1}{5}x_4 \\
x_5 &= 120 - (-2)x_1 + 0x_2 - (-1)x_4 \\
x_6 &= 432 - \tfrac{13}{5}x_1 - \tfrac{14}{5}x_2 - (-\tfrac{1}{5})x_4 \\
x_7 &= 480 - 3x_1 - 4x_2 - 0 \cdot x_4
\end{aligned}$$

Basislösung $\vec{x}^\beta$

und $$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 48 \\ 0 \\ 120 \\ 432 \\ 480 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 2 \\ -13/5 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \\ -14/5 \\ -4 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/5 \\ 1 \\ 1 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Nicht-Basis-Variablen zu $\vec{\beta}$

allgemein:

▶ 16

$$\mathbb{L} = \{ \vec{x} = \vec{x}^{\beta} + x_{\nu_1} \cdot \vec{u}_1 + x_{\nu_2} \cdot \vec{u}_2 + \dots + x_{\nu_{q-m}} \cdot \vec{u}_{q-m} \mid x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_{q-m}} \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{für} \quad \vec{u}_k = (u_{k,1}, \dots, u_{k,q})^T$$

$$\text{mit} \begin{cases} u_{k,\beta_j} = -a_{\nu_k,\beta_j} \\ u_{k,\nu_k} = 1 \\ u_{k,\ell} = 0 \;\; \forall\, \ell \; \{\nu_1, \dots, \nu_{q-m}\} \setminus \{\nu_k\} \end{cases}$$

Weitere Beispiele

Lösungsmengen zu

▶ 17

i)
$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 360 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 480 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 480 \\ \hline -2 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta}^T = (4, 5, 6, 7)$$

$$\mathbb{L} = \{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 240 \\ 360 \\ 480 \\ 480 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

ii)
$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1/4 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & -1/20 & 24 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 1 & -7/10 & 96 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 120 \\ \hline 9/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3/4 & 600 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta}^T = (3, 5, 6, 2)$$

$$\mathbb{L} = \{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 24 \\ 0 \\ 120 \\ 96 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/5 \\ 1 \\ 1 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1/20 \\ 0 \\ 0 \\ 7/10 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4, x_7 \in \mathbb{R} \}$$

3. Vorteil der Kanonischen Normalform

Der Wert der Zielfunktion lässt sich in Abhängigkeit vom Zielfunktionswert der zugrundeliegenden Basislösung und der Nicht-Basis-Variablen schreiben. ▶ 18

beispielhafte Erläuterung:

Ausgangsproblem:

$$\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = (2, 4, 5, 0, 0, 0) \cdot \vec{x} \\ \text{udN. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \\ 480 \\ 480 \end{pmatrix} \\ \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

- Zielfunktionswert basierend auf der Wahl $\vec{\beta} = (4,5,6,7)$ ▶ 19

  alle Lösungen lassen sich beschreiben durch

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 240 \\ 360 \\ 480 \\ 480 \end{pmatrix}}_{= \vec{x}^{\beta}} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

damit ist
$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= 2 \cdot (0 + 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3) + 4\,(0 + 0\,x_1 + 1\,x_2 + 0\,x_3) \\ &\quad + 5\,(0 + 0\,x_1 + 0\,x_2 + 1 \cdot x_3) \\ &= \underbrace{0}_{= F(\vec{x}^{\beta})} + 2\,x_1 + 4\,x_2 + 5\,x_3 \end{aligned}$$

Nicht-Basis-Variablen

- Zielfunktionswert basierend auf der Wahl $\vec{\beta} = (3,5,6,7)$ ▶ 20

  alle Lösungen lassen sich beschreiben durch

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 48 \\ 0 \\ 120 \\ 432 \\ 480 \end{pmatrix}}_{= \vec{x}^{\beta}} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2/5 \\ 0 \\ 2 \\ -13/5 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \\ -14/5 \\ -4 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/5 \\ 1 \\ 1 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

damit ist
$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= 2 \cdot (0 + 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4) \\ &\quad + 4\,(0 + 0\,x_1 + 1\,x_2 + 0\,x_4) \\ &\quad + 5\,(48 + (-\tfrac{2}{5})x_1 + (-\tfrac{1}{5})x_2 + (-\tfrac{1}{5})\,x_4) \\ &= 2\,x_1 + 4\,x_2 + 240 - 2x_1 - x_2 - x_4 \\ &= \underbrace{240}_{= F(\vec{x}^{\beta})} + 0 \cdot x_1 + 3\,x_2 - 1 \cdot x_4 \end{aligned}$$

Nicht-Basis-Variablen

▶ 21

- Zielfunktionswert basierend auf der Wahl $\vec{\beta} = (3,5,6,2)$

alle Lösungen lassen sich beschreiben durch

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 24 \\ 0 \\ 120 \\ 96 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \vec{x}^{\beta}} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/5 \\ 1 \\ 1 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1/20 \\ 0 \\ 0 \\ 7/10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

damit ist

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= 2 \cdot (0 + 1x_1 + 0\,x_4 + 0 \cdot x_7) + 4\left(120 - \tfrac{3}{4} x_1 + 0 x_4 - \tfrac{1}{4} x_7\right) \\ &\quad + 5\left(24 - \tfrac{1}{4} x_1 - \tfrac{1}{5} x_4 + \tfrac{1}{20} x_7\right) \\ &= 2x_1 + 480 - 3x_1 - x_7 + 120 - \tfrac{5}{4} x_1 - x_4 + \tfrac{1}{4} x_7 \\ &= \underbrace{600}_{F(\vec{x}^{\beta})} - \tfrac{9}{4} x_1 - 1 \cdot x_4 - \tfrac{3}{4} x_7 \end{aligned}$$

Nicht-Basis-Variablen

▶ 22

nur im Video (mündliche Erklärung): welche Vorteile hat und welche Möglichkeiten bietet diese Darstellung des Zielfunktionswertes?

Trick:

▶ 23

mit Einführung einer Variablen z für $F(\vec{x})$ und eines Parameters $\mathcal{Z}$ für $F(\vec{x}^{\beta})$ ergibt sich jeweils eine lineare Gleichung für z, $\underbrace{x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_{q-m}}}_{\text{Nicht-Basis-Variablen}}$

beispielhafte Erklärung

i) für $\vec{\beta} = (4,5,6,7)$ ist $F(\vec{x}) = 0 + 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$

$$\Leftrightarrow \quad z = \mathcal{Z} + 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + z = \mathcal{Z}$$

ii) für $\vec{\beta} = (3,5,6,7)$ ist $F(\vec{x}) = 240 + 0 \cdot x_1 + 3x_2 - 1 \cdot x_4$

$$\Leftrightarrow \quad z = \mathcal{Z} + 0 \cdot x_1 + 3x_2 - 1 \cdot x_4$$

$$\Leftrightarrow \quad -0 \cdot x_1 - 3x_2 + 1 \cdot x_4 + z = \mathcal{Z}$$

iii) für $\vec{\beta} = (3,5,6,2)$ ist $F(\vec{x}) = 600 - \frac{9}{4} x_1 - 1 \cdot x_4 - \frac{3}{4} x_7$

$$\Leftrightarrow \quad z = \mathcal{Z} - \tfrac{9}{4} x_1 - 1 \cdot x_4 - \tfrac{3}{4} x_7$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{9}{4} x_1 + 1 \cdot x_4 + \tfrac{3}{4} x_7 + z = \mathcal{Z}$$

Insgesamt lässt sich also das betrachtete LP aus dem Blickwinkel unterschiedlicher Basislösungen, d.h. Ecken der Menge der zulässigen Lösungen kompakt beschreiben in der Form

▶ 24 ausführliche Überleitung

▶ 25

$$\boxed{\begin{aligned} A\vec{x} + 0\cdot z &= \vec{b} \\ -\vec{c}^{\,T}\cdot\vec{x} + 1\cdot z &= Z \end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ -\vec{c}^{\,T} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ Z \end{pmatrix}}$$

wobei $A, \vec{b}, \vec{c}, Z$ jeweils vom zugehörigen $\vec{\beta}$ abhängen und insbesondere gilt:

- $\vec{a}_{\beta_i} = \vec{e}_i \in \mathbb{R}^m \quad \forall\, i = 1,\dots,m$
- $c_{\beta_i} = 0 \quad \forall\, i = 1,\dots,m$

  } Kanonische Normalform
- $Z = F(\vec{x}^{\beta})$

⚠ Das Simplextableau zur Basis-Index-Wahl $\vec{\beta}$ fasst $\begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ -\vec{c}^{\,T} & Z \end{pmatrix}$ zusammen

Beispiele

▶ 26

Ausgangsproblem:

$$\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = (2,4,5,0,0,0,0)\cdot\vec{x} \\ \text{udN. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \\ 480 \\ 480 \end{pmatrix} \\ \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

zugehörige Sicht ...

- für $\vec{\beta}^T = (4,5,6,7)$:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 360 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 480 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 480 \\ \hline -2 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- für $\vec{\beta}^T = (3,5,6,7)$:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2/5 & 1/5 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 13/5 & 14/5 & 0 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 432 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 480 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 240 \end{array}\right)$$

- für $\vec{\beta}^T = (3,5,6,2)$:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1/4 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & -1/20 & 24 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 1 & -7/10 & 96 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 120 \\ \hline 9/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3/4 & 600 \end{array}\right)$$

zur Tableau-Transformation

- Ziel: Wechsel von einer Ecke $\vec{x}^{\beta}$ zu einer Ecke $\vec{x}^{\tilde{\beta}}$ mit $F(\vec{x}^{\tilde{\beta}}) > F(\vec{x}^{\beta})$

möglich, wenn in „$-c_{\nu_1} \cdot x_{\nu_1} - \dots - c_{\nu_{q-m}} \cdot x_{\nu_{q-m}} + z = \tilde{z}$"

wenigstens ein $-c_{\nu} < 0$

- Wenn Zielerreichung möglich, Wechsel zu einer Ecke, die mit auf vielversprechenster Variable x_k mit $k \in \{\nu_1, \dots, \nu_{q-m}\}$ basiert (möglichst stark negativer Wert $-c_k$)

formal:

- x_k wird neue Basisvariable ⇝ Pivotspalte
- eine Basisvariable x_{β_i} muss aufgegeben werden
  - ↳ diejenige, die bei Bewegung in Richtung x_k zuerst 0 wird ⇝ Pivotzeile

Umsetzung:

EZU so, dass Spalte k Gestalt von $\vec{e}_i$ übernimmt.
und so, dass $-c_k$ zu Null wird.