begleitendes Beispiel – Produktionsplanung

1

Ein Unternehmen stellt die zwei Produkte A und B her. Die Produktion benötigt jeweils Einsatz von Personen, Maschinen und Rohstoffen, die alle pro Produktionswoche nur in beschränktem Maße zur Verfügung stehen. Nicht verbrauchte Rohstoffe müssen am Ende der Woche entsorgt werden und die beschäftigten Personen können keine Überstunden arbeiten.

Pro produzierter Mengeneinheit benötigt das Produkt A eine Maschinenstunde, das Produkt B hingegen zwei. Insgesamt können die Maschinen maximal 150 Stunden pro Woche benutzt werden. Die maximal verarbeitbare Rohstoffmenge beläuft sich auf 400 Tonnen und es stehen pro Woche höchstens 80 Personenstunden für die Endmontage zur Verfügung.

Das Produkt A benötigt pro Mengeneinheit 6 Tonnen des Rohstoffes, das Produkt B 3 Tonnen. Der für die Endmontage benötigte menschliche Arbeitseinsatz beläuft sich bei beiden Produkten auf je eine Stunde pro hergestellter Mengeneinheit.

Das Unternehmen ist bestrebt, den insgesamt erzielbaren Gewinn bei Verkauf der genannten Güter zu maximieren, wobei bekannt ist, dass mit dem Produkt A ein Gewinn von 10 € zu erzielen ist, das Produkt B wirft 15 € pro Mengeneinheit ab.

Es stellt sich die Frage, wieviele Mengeneinheiten von jedem Produkt zur fertigen sind, um dieses Ziel zu erreichen.

I. Modellbildung:

2

- Entscheidungsvariablen: $x_1, x_2 \hat{=}$ produzierte / verkaufte Mengeneinheit von A bzw. B
- prinzipielle Einschränkung: $x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$
- Zielfunktion: $F(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 + 15\, x_2$
- Nebenbedingungen:
  - Personen: $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 80$
  - Maschinen: $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 150$
  - Rohstoffe: $6x_1 + 3x_2 \leq 400$

Somit erhält man das LP:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiere} & F(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2 \\ \text{udN} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 80 \\ & 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 150 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 400 \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

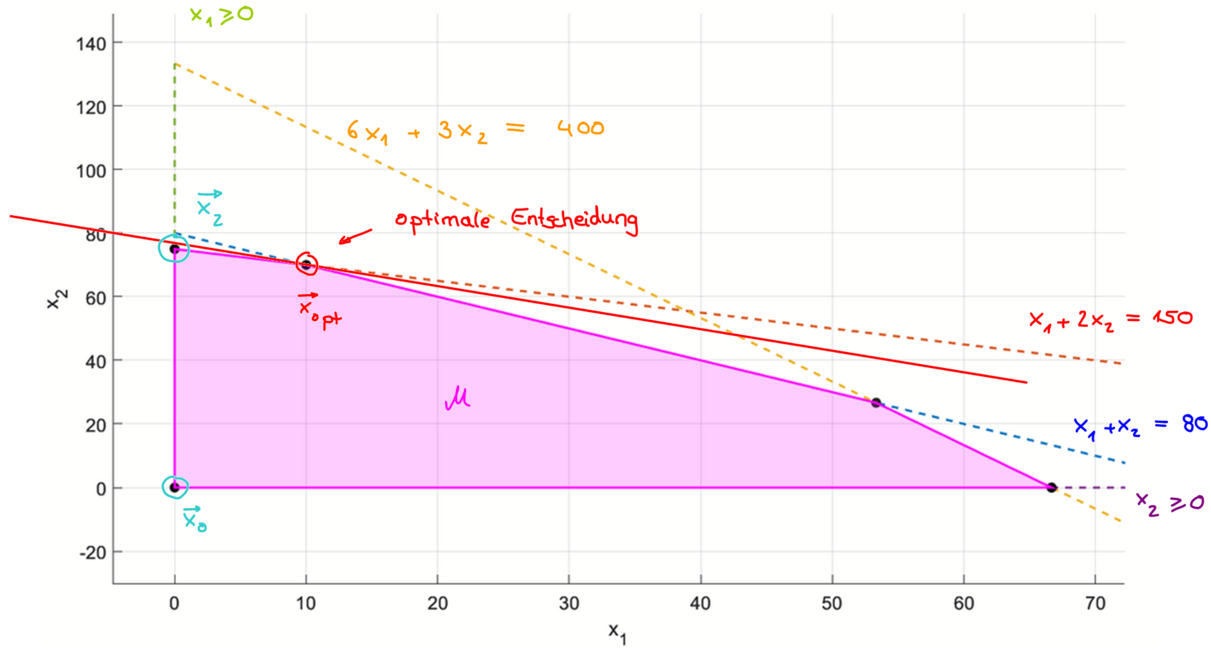
bzw. in Matrix-Vektor-Notation:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T} \vec{x} \\ \text{udN.} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{array}\right. \qquad \text{mit} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 150 \\ 400 \end{pmatrix}$$

graphische Repräsentation der Menge der zulässigen Entscheidungen ▶ 3



▶ 4 im Video: graphische Lösung

II.) Bestimmung der optimalen Lösung mit dem primalen Simplex ▶ 5

Starttableau: ▶ 6

Pivotzeile $i = 2$

▶ 7

$$T_0 := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 400 \\ \hline -10 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \frac{15}{2} \quad | \cdot \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \end{array} \qquad \vec{\beta} = (3,4,5)^T$$

Pivotspalte
$k = 2$

zugeh. Basislösung: $\vec{x} = (0, 0, 80, 150, 400)^T$

zugeh. Ecke: $\vec{x}_1 = \binom{0}{0}$

▶ 11 im Video: zug. Basislösung & Ecke und graphische Repräsentation

erste Verbesserung:

Pivotzeile $i = 1$

▶ 8

$$\sim T_1 := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 5 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 75 \\ 9/2 & 0 & 0 & -3/2 & 1 & 175 \\ \hline -5/2 & 0 & 0 & 15/2 & 0 & 1125 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \quad -9 \quad 5 \quad | \cdot 1 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \vec{\beta} = (3,2,5)^T$$

Pivotspalte
$k = 1$

zugeh. Basislösung: $\vec{x} = (0, 75, 5, 0, 175)^T$

zugeh. Ecke: $\vec{x}_1 = \binom{0}{75}$

▶ 11 im Video: zug. Basislösung & Ecke und graphische Repräsentation zweite Verbesserung:

▶ 9

$$\sim T_2 := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & 1 & 130 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 1150 \end{array}\right) \qquad \vec{\beta} = (1,2,5)^T$$

optimale Tableau ist erreicht

mit $F_{max} = 1150$

es gibt eine eindeutige optimale Lösung

$$\vec{x} = (\underbrace{10, 70}_{\text{Struktur-}}, \underbrace{0, 0, 130}_{\text{Schlupf-}})^T$$

Struktur- & Schlupf- Variablen

somit $\vec{x}_{opt} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix}$

▶ 10

d.h. mit der Produktion von 10 Mengeneinheiten von Produkt A und 70 Mengeneinheiten von Produkt B wird der maximale, unter den Einschränkungen, mögliche Gewinn $F_{max} = 1150$ € erzielt

▶ 11

im Video: zug. Basislösung & Ecke und graphische Repräsentation

Dualität

▶ 12

Motivation: Bestimmung einer oberen / unteren Grenze für den Zielfunktionswert

Beispiel:

▶ 13

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad F(x_1,x_2) = 10x_1 + 15x_2 \\ \text{udN} \quad 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \le 80 \quad (1) \\ \qquad 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 150 \quad (2) \\ \qquad 6x_1 + 3x_2 \le 400 \quad (3) \\ \qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

obere Grenzen für $F(x_1,x_2)$

- aus NB (1) ▶ 14

$$F(x_1,x_2) = 10x_1 + 15x_2 \le 15x_1 + 15x_2 = \underbrace{15(x_1+x_2)}_{\text{„15 mal NB (1)"}} \le 15\cdot 80 = 1200$$

somit aus (1): $F(x_1,x_2) \le 1200$

- aus NB (2) ▶ 15

$$F(x_1,x_2) = 10x_1 + 15x_2 \le 10x_1 + 20x_2 = \underbrace{10(x_1+2x_2)}_{\text{„10 mal NB (2)"}} \le 10\cdot 150 = 1500$$

somit aus (2): $F(x_1,x_2) \le 1500$

· aus NB(3) ▶ 16

$$F(x_1,x_2) = 10x_1 + 15x_2 \le 30x_1 + 15x_2 = \underbrace{5(6x_1+3x_2)}_{\text{„5 mal NB (3)"}} \le 5 \cdot 400 = 2000$$

somit aus (3): $F(x_1,x_2) \le 2000$

▶ 17 im Video: Interpretation der durch die NBen entstehenden oberen Grenzen der Zielfunktion

· aus NB (2) & NB (3): ▶ 18

· $F(x_1,x_2) = 10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 \le 11x_1 + 16x_2 = 7x_1 + 14x_2 + 4x_1 + 2x_2$

▶ 19 $= 7(1x_1 + 2x_2) + \frac{2}{3}(6x_1+3x_2) \le 7 \cdot 150 + \frac{2}{3} \cdot 400 = 1316{,}\overline{6}$

somit aus (2) & (3):

$F(x_1,x_2) \le 1316{,}\overline{6}$

· $F(x_1,x_2) = 10 \cdot x_1 + 15x_2 \le 10 \cdot x_1 + 15x_2 = \frac{20}{3}x_1 + \frac{40}{3}x_2 + \frac{10}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2$

▶ 20 $= \frac{20}{3}(x_1 + 2x_2) + \frac{5}{9}(6x_1 + 3x_2) \le \frac{20}{3} \cdot 150 + \frac{5}{9} \cdot 400 = 1222{,}\overline{2}$

somit aus (2) & (3):

$F(x_1,x_2) \le 1222{,}\overline{2}$

?

- gibt es eine kleinere obere Schranke ?
- wie kommt man auf die Werte $\frac{20}{3}$, $\frac{5}{9}$?

· aus NB (1), (2), (3) ▶ 21

$F(x_1,x_2) = 10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 \le 10x_1 + 15x_2 = 5x_1 + 5x_2 + 5x_1 + 10x_2 + 0x_1 + 0x_2$

$= 5(1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2) + 5(1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2) + 0 \cdot (6x_1 + 3x_2)$

$\le 5 \cdot 80 + 5 \cdot 150 + 0 \cdot 400 = 1150$

d.h. aus (1), (2), (3):

$F(x_1,x_2) \le 1150$

Grundidee: Abschätzung des Zielfunktionswertes durch Linearkombination der Nebenbedingungen ▶ 22

beispielhaftes Vorgehen

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad F(x_1,x_2) = 10x_1 + 15x_2 \\ \text{udN} \quad 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \le 80 \quad (1) \\ \qquad 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 150 \quad (2) \\ \qquad 6x_1 + 3x_2 \le 400 \quad (3) \\ \qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 23

Ansatz:

$$F(x_1,x_2) = 10x_1 + 15x_2 \le \lambda_1\cdot(1\cdot x_1 + 1\cdot x_2) + \lambda_2(1\cdot x_1 + 2\cdot x_2) + \lambda_3\cdot(6x_1 + 3x_2)$$

$$\le \boxed{80\cdot\lambda_1 + 150\cdot\lambda_2 + 400\cdot\lambda_3}$$

obere Schranke für $F(x_1,x_2)$ basierend auf $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

▶ 24

- Grundvorraussetzung: $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \ge 0$
- Ziel: minimiere $80\lambda_1 + 150\lambda_2 + 400\lambda_3$

mit $\lambda_1\cdot(1\cdot x_1 + 1\cdot x_2) + \lambda_2(1\cdot x_1 + 2\cdot x_2) + \lambda_3\cdot(6x_1 + 3x_2)$ ▶ 25

$$= 1\cdot\lambda_1\cdot x_1 + 1\cdot\lambda_1\cdot x_2 + 1\cdot\lambda_2 x_1 + 2\cdot\lambda_2\cdot x_2 + 6\lambda_3 x_1 + 3\lambda_3\cdot x_2$$

$$= (1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 6\lambda_3)\cdot x_1 + (1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 3\lambda_3)\cdot x_2$$

muss gelten, dass $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ so gewählt sind, dass für alle $\binom{x_1}{x_2} \in M$ gilt:

$$F(x_1,x_2) = \boxed{10}\,x_1 + \boxed{15}\,x_2 \le \boxed{(1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 6\lambda_3)}\cdot x_1 + \boxed{(1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 3\lambda_3)}\cdot x_2$$

das ist gewährleistet für (via Koeffizientenvergleich)

$$\begin{cases} \bullet\ \boxed{10 \le 1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 6\lambda_3} \\ \bullet\ \boxed{15 \le 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 3\lambda_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 6\lambda_3 \ge 10 \\ 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 3\lambda_3 \ge 15 \end{cases}$$

insgesamt ergibt sich das lineare Optimierungsproblem:

▶ 26

$$\begin{cases} \text{minimiere} \quad F^*(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = 80\cdot\lambda_1 + 150\cdot\lambda_2 + 400\cdot\lambda_3 \\ \text{udN.} \quad 1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 6\lambda_3 \ge 10 \\ \qquad 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 3\lambda_3 \ge 15 \\ \qquad \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$$

in Matrix-Vektor-Notation:

$$(LP^*)\quad \begin{cases} \text{minimiere } F^*(\vec{\lambda}) = \vec{c}^{*T} \cdot \vec{\lambda} \\ \text{udN. } A^* \cdot \vec{\lambda} \geq \vec{b}^* \\ \qquad \vec{\lambda} \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

mit $\vec{c}^* = (80, 150, 400)^T \in \mathbb{R}^3$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$\vec{b}^* = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

entstanden aus dem LP

$$(LP)\quad \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{udN. } A\vec{x} \leq \vec{b} \\ \qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 150 \\ 400 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

▶ 27

(LP^*) entsteht aus (LP) durch folgenden Schritte

- aus dem Maximierungsproblem wird eine Minimierungsaufgabe
- der Begrenzungsvektor $\vec{b}$ von (LP) wird zum Vektor der Zielfunktionskoeffizienten $\vec{c}^*$ von (LP^*)

  Kurz: $\vec{c}^* = \vec{b}$

- der Vektor der Zielfunktionskoeffizienten $\vec{c}$ von (LP) wird zum Begrenzungsvektor $\vec{b}^*$ von (LP^*)

  Kurz: $\vec{b}^* = \vec{c}$

- aus der Begrenzung nach oben in den NBen von (LP) wird eine Begrenzung nach unten in den NBen von (LP^*)

  Kurz: „$\leq$" in (LP) $\rightsquigarrow$ „$\geq$" in (LP^*)

- die Koeffizientenmatrizen von (LP) und (LP^*) sind zueinander transponiert

  Kurz: $A^* = A^T$ bzw. $A = (A^*)^T$

Beobachtung:

- jede Strukturvariable $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von (LP^*) korrespondiert mit einer NB von (LP)
- jede NB von (LP^*) korrespondiert mit einer der Strukturvariablen x_1, x_2 von (LP)

Allgemein definiert man

▶ 28

Definition (primales & duales Optimierungsproblem)

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem in Standardform

$$(\text{LP}) \quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^T\vec{x} \\ \text{u.d.N} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Man nennt dann das lineare Optimierungsproblem

$$(\text{LP}^\star) \quad \begin{cases} \text{minimiere} & F^\star(\vec{\lambda}) = \vec{b}^T\vec{\lambda} \\ \text{u.d.N} & A^T\vec{\lambda} \geq \vec{c} \\ & \vec{\lambda} \geq \vec{0} \end{cases}$$

das zu (LP) *duale Problem* für $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$.

Das Problem (LP) wird in diesem Kontext als das zu (LP*) *primale Problem* bezeichnet.

Da man jedes LP in Standardform darstellen kann, kann man auch jedes LP dualisieren.

Man kann zeigen, dass insbesondere die folgenden Dualisierungsregeln gelten:

▶ 29

Satz (Dualisierungsregeln)

Dualisierung

Maximierungsproblem	Minimierungsproblem
Vektor der Zielfunktionskoeffizienten	Begrenzungsvektor
Begrenzungsvektor	Vektor der Zielfunktionskoeffizienten
Koeffizientenmatrix transponieren	
Strukturvariablen $x_1, \ldots, x_n$	Nebenbedingungen $1, \ldots, n$
$x_k \geq 0$	k. NB: „$\geq$“
$x_k \in \mathbb{R}$	k. NB: „$=$“
Nebenbedingungen $1, \ldots, m$	Strukturvariablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$
i. NB: „$\leq$“	$\lambda_i \geq 0$
i. NB: „$=$“	$\lambda_i \in \mathbb{R}$

Beispiele

i) primales Problem

▶ 30

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad F(x_1, x_2, x_3) = -1 \cdot x_1 + 2x_2 + 1 \cdot x_3 \\ \text{udN.} \quad 2x_1 + 1 \cdot x_3 \leq 8 \\ \qquad\quad 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 125 \\ \qquad\quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \\ \qquad\quad x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Satz (Dualisierungsregeln)

Dualisierung

Maximierungsproblem	Minimierungsproblem
Vektor der Zielfunktionskoeffizienten	Begrenzungsvektor
Begrenzungsvektor	Vektor der Zielfunktionskoeffizienten
Koeffizientenmatrix transponieren	
Strukturvariablen $x_1, \ldots, x_n$	Nebenbedingungen $1, \ldots, n$
$x_k \geq 0$	k. NB: „$\geq$“
$x_k \in \mathbb{R}$	k. NB: „$=$“
Nebenbedingungen $1, \ldots, m$	Strukturvariablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$
i. NB: „$\leq$“	$\lambda_i \geq 0$
i. NB: „$=$“	$\lambda_i \in \mathbb{R}$

Hilfsgrößen:

- $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 125 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

- $n = 3$ Strukturvariablen
- $m = 2$ NBen
- Nichtnegativitätsforderung für x_1, x_2
- Nicht vorzeichenbeschränkte Variable x_3

duales Problem:

$$\begin{cases} \text{minimiere} \quad F^*(\lambda_1, \lambda_2) = 8\lambda_1 + 125 \cdot \lambda_2 \\ \text{udN} \quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq -1 \\ \text{3 NBen} \quad 0\lambda_1 + (-1)\lambda_2 \geq 2 \\ \qquad\quad 1 \cdot \lambda_1 + 4\lambda_2 = 1 \\ \qquad\quad \lambda_1 \geq 0 \\ \qquad\quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Kurz:

$$\begin{cases} \text{minimiere} \quad F^*(\lambda_1, \lambda_2) = 8 \cdot \lambda_1 + 125\lambda_2 \\ \text{udN} \quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq -1 \\ \qquad\quad -\lambda_2 \geq 2 \\ \qquad\quad \lambda_1 + 4\lambda_2 = 1 \\ \qquad\quad \lambda_1 \geq 0, \; \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ii) primales Problem : ▶ 31

$$\begin{cases} \text{minimiere} \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_3 - 7x_4 \\ \text{udN.} \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 18 \\ \qquad -x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 \geq 12 \\ \qquad x_1 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \\ \qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Satz (Dualisierungsregeln)

Dualisierung	
Maximierungsproblem	Minimierungsproblem
Vektor der Zielfunktionskoeffizienten	Begrenzungsvektor
Begrenzungsvektor	Vektor der Zielfunktionskoeffizienten
Koeffizientenmatrix transponieren	
Strukturvariablen $x_1, \dots, x_n$	Nebenbedingungen $1, \dots, n$
$x_k \geq 0$	k. NB: „$\geq$“
$x_k \in \mathbb{R}$	k. NB: „$=$“
Nebenbedingungen $1, \dots, m$	Strukturvariablen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$
i. NB: „$\leq$“	$\lambda_i \geq 0$
i. NB: „$=$“	$\lambda_i \in \mathbb{R}$

Hilfsgrößen:

- $\vec{c} = (2, 0, 3, -7)^T$
- $\vec{b} = (18, 12)^T$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

- $n = 4$ Strukturvariablen
- $m = 2$ Nebenbedingungen
- Nichtnegativitätsforderung für x_1, x_3
- keine VZ-Beschränkung für x_2, x_4

duales Problem

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad F^*(\lambda_1, \lambda_2) = 18 \cdot \lambda_1 + 12 \lambda_2 \\ \text{udN.} \quad 2 \cdot \lambda_1 + (-1) \lambda_2 \leq 2 \\ \text{4 NBen} \quad 2 \cdot \lambda_1 + 7 \cdot \lambda_2 = 0 \\ \qquad -1 \cdot \lambda_1 + (-2) \cdot \lambda_2 \leq 3 \\ \qquad 0 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 = -7 \\ \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R} \\ \qquad \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Kurz : duale Problem :

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad F^*(\lambda_1, \lambda_2) = 18\lambda_1 + 12\lambda_2 \\ \text{udN.} \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 2 \\ \qquad 2\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \\ \qquad -\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 3 \\ \qquad 4\lambda_2 = -7 \\ \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \; \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

hier gilt $M^* = \emptyset$

iii) Primales Problem

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1,x_2) = 4x_1 + 7x_2 \\ \text{udN.} & \boxed{\begin{matrix} 6x_1 + 3x_2 \geq 11 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \end{matrix}} \\ & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

passen nicht zu →

Korrektur: mal „-1"

Satz (Dualisierungsregeln)

Dualisierung	
Maximierungsproblem	Minimierungsproblem
Vektor der Zielfunktionskoeffizienten	Begrenzungsvektor
Begrenzungsvektor	Vektor der Zielfunktionskoeffizienten
Koeffizientenmatrix transponieren	
Strukturvariablen $x_1, \ldots, x_n$	Nebenbedingungen $1, \ldots, n$
$x_k \geq 0$	k. NB: „$\geq$"
$x_k \in \mathbb{R}$	k. NB: „$=$"
Nebenbedingungen $1, \ldots, m$	Strukturvariablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$
i. NB: „$\leq$"	$\lambda_i \geq 0$
i. NB: „$=$"	$\lambda_i \in \mathbb{R}$

angepasstes LP:

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1,x_2) = 4x_1 + 7x_2 \\ \text{udN.} & \boxed{\begin{matrix} -6x_1 - 3x_2 \leq -11 \\ -2x_1 - x_2 \leq -4 \end{matrix}} \\ & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Satz (Dualisierungsregeln)

Dualisierung	
Maximierungsproblem	Minimierungsproblem
Vektor der Zielfunktionskoeffizienten	Begrenzungsvektor
Begrenzungsvektor	Vektor der Zielfunktionskoeffizienten
Koeffizientenmatrix transponieren	
Strukturvariablen $x_1, \ldots, x_n$	Nebenbedingungen $1, \ldots, n$
$x_k \geq 0$	k. NB: „$\geq$"
$x_k \in \mathbb{R}$	k. NB: „$=$"
Nebenbedingungen $1, \ldots, m$	Strukturvariablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$
i. NB: „$\leq$"	$\lambda_i \geq 0$
i. NB: „$=$"	$\lambda_i \in \mathbb{R}$

Hilfsgrößen:

- $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
- $\vec{b} = (-11, -4, 0, 8)^T$
- $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $n = 2$ Strukturvariablen
- $m = 4$ NBen
- Nichtnegativitätsbedingung für x_1, x_2

duales Problem

$$\begin{cases} \text{minimiere} & F^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = -11 \cdot \lambda_1 + (-4) \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + 8 \cdot \lambda_4 \\ \text{udN.} & -6 \cdot \lambda_1 + (-2)\lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 \geq 4 \\ \text{2 NBen} & -3 \cdot \lambda_1 + (-1)\lambda_2 + (-2) \cdot \lambda_3 + 0 \cdot \lambda_4 \geq 7 \\ & \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0,\ \lambda_4 \geq 0 \end{cases}$$

Kurz: duales Problem:

$$\begin{cases} \text{minimiere} & F^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = -11\lambda_1 - 4\lambda_2 + 8\lambda_4 \\ \text{udN.} & -6\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \geq 4 \\ & -3\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geq 7 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \end{cases}$$