Dualität – Zusammenhänge von primalem & dualem Problem

Erinnerung:

▶ 1

Definition (primales & duales Optimierungsproblem)

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem in Standardform

$$(\text{LP}) \quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{u.d.N} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Man nennt dann das lineare Optimierungsproblem

$$(\text{LP}^*) \quad \begin{cases} \text{minimiere} & F^*(\vec{\lambda}) = \vec{b}^T \vec{\lambda} \\ \text{u.d.N} & A^T \vec{\lambda} \geq \vec{c} \\ & \vec{\lambda} \geq \vec{0} \end{cases}$$

das zu (LP) *duale Problem* für $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$.

Das Problem (LP) wird in diesem Kontext als das zu (LP*) *primale Problem* bezeichnet.

Beispiel – Fortsetzung

▶ 2

primales Problem:

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2 \\ \text{u.d.N} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 80 \\ & 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 150 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 400 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableaus bei Verwendung des primalen Simplex

$$T_0 := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 400 \\ \hline -10 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta} = (3,4,5)^T$$

$$T_1 := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 5 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 75 \\ 9/2 & 0 & 0 & -3/2 & 1 & 175 \\ \hline -5/2 & 0 & 0 & 15/2 & 0 & 1125 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta} = (3,2,5)^T$$

$$T_2 := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & 1 & 130 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 1150 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta} = (1,2,5)^T$$

duales Problem:

$$\begin{cases} \text{minimiere} & F^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 80 \cdot \lambda_1 + 150 \cdot \lambda_2 + 400 \cdot \lambda_3 \\ \text{u.d.N.} & 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 \geq 10 \\ & 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 15 \\ & \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Überführung in Standardform:

(Achtung: $(-F^*)_{max} = -1 \cdot F^*_{min}$ d.h. $F^*_{min} = -1 \cdot (-F^*)_{max}$)

$$\begin{cases} \text{maximiere} & -F^*(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = -80\lambda_1 - 150\lambda_2 - 400\lambda_3 \\ \text{u.d.N.} & -1\cdot\lambda_1 - 1\cdot\lambda_2 - 1\cdot\lambda_3 \le -10 \\ & -1\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\cdot\lambda_3 \le -15 \\ & \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$$

I.) dualer Simplex zur Bestimmung eines zulässigen Starttableaus für den primalen Simplex

Starttableau: (Pivotspalte $\kappa = 2$; Pivotzeile $i = 2$; nicht primal zulässig)

$$T_0^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -10 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & -15 \\ \hline 80 & 150 & 400 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ +75 \end{array} \quad 1\cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$\vec{\beta}^* = (4,5)^T$

Pivotzeile $i = 1$; Pivotspalte $\kappa = 1$

$$\sim T_1^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ \hline 5 & 0 & 175 & 0 & 75 & -1125 \end{array}\right) \begin{array}{l} +1 \\ +10 \\ \\ \end{array}$$

$\vec{\beta}^* = (4,2)^T$

primal zulässig

$$\sim T_2^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 130 & 10 & 70 & -1150 \end{array}\right)$$

$\vec{\beta}^* = (1,2)^T$

dualer Simplex beendet mit zulässigen Basislösung

$\vec{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)^T = (5,5,0,0,0)^T$

zugeh. Ecke (Strukturvariablen) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^T = (5,5,0)^T$

II.) Optimierung mit dem primalen Simplex ← Durchführung nicht notwendig, da alle Werte im c-Block bereits nicht negativ sind d.h. $\forall p: -c_p \ge 0$

▶ 3

Starttableau

$$T_2^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 130 & 10 & 70 & -1150 \end{array}\right)$$

$\vec{\beta}^* = (1,2)^T$

alle Werte $-c_j$ positiv

d.h. Tableau T_2^* ist optimal $(-F^*)_{max} = -1150$

optimale, eindeutige Lösung: $\vec{\lambda} = (5,5,0,0,0)^T$

optimale Entscheidung: $\vec{\lambda}_{opt} = (5,5,0)^T$

damit ist $F^*_{min} = 1150$

Dr. rer. nat. M. Striebel

beispielhafte Gegenüberstellung von primalem & dualem Problem

▶ 4

primal	dual

LP in Standardform:

primal

$$\text{maximiere } F(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2$$

$$\text{u.d.N.} \quad \begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &\leq 80 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 150 \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 400 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

dual

$$\text{maximiere } -F^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -80\lambda_1 - 150\lambda_2 - 400\lambda_3$$

$$\text{u.d.N.} \quad \begin{aligned} -1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_3 &\leq -10 \\ -1\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 &\leq -15 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 &\geq 0,\ \lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

LP in kanonischer Normalform

▶ 5

primal

$$\text{maximiere } 10x_1 + 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{u.d.N.} \quad \begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1 \cdot x_3 &= 80 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1 \cdot x_4 &= 150 \\ 6x_1 + 3x_2 + 1 \cdot x_5 &= 400 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Strukturvariablen: x_1, x_2

Schlupfvariablen: x_3, x_4, x_5

dual

$$\text{maximiere } -80\lambda_1 - 150\lambda_2 - 400\lambda_3 + 0\lambda_4 + 0 \cdot \lambda_5$$

$$\text{u.d.N.} \quad \begin{aligned} -1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 - 1\lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 &= -10 \\ -1\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 + 1 \cdot \lambda_5 &= -15 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0, \lambda_5 \geq 0$$

Strukturvariablen: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Schlupfvariablen: λ_4, λ_5

optimale Tableaus

▶ 6

$T_2 :=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	2	−1	0	10
0	1	−1	1	0	70
0	0	−9	3	1	130
0	0	5	5	0	1150

$T_2^* =$

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	
1	0	9	−2	1	5
0	1	−3	1	−1	5
0	0	130	10	70	−1150

Die Lösung des primalen LPs enthält die Lösung des dualen Problems und umgekehrt

Basislösung: $\vec{x} = (10, 70, 0, 0, 130)^T$

mit $F_{max} = 1150$

Basislösung $\vec{\lambda} = (5, 5, 0, 0, 0)^T$

mit $F^*_{min} = 1150$

$\Leftrightarrow$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Allgemeine Zusammenhänge im Kontext der Dualität

▶ 7

- **zum primalen & dualen Simplex-Verfahren**

▶ 8

Mit den Begriffen

Definition (primale Zulässigkeit)

Man nennt ein Simplex-Tableau in kanonischer Normalform *primal zulässig*, wenn alle Eintragungen im b-Block nicht-negativ sind, d. h. wenn $b_i \geq 0 \;\; \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

und

Definition (duale Zulässigkeit)

Man nennt ein Simplex-Tableau in kanonischer Normalform *dual zulässig*, wenn alle Eintragungen im c-Block nicht-negativ sind, d. h. wenn $c_k \geq 0 \;\; \forall k \in \{1, \ldots, m\}$

Kann man festhalten:

1.) Ziel des dualen Simplex ist die Erzeugung eines primal zulässigen Tableaus.

2.) Ziel des primalen Simplex ist die Erzeugung eines dual zulässigen Tableaus.

3.) **Satz (Optimalität eines Simplex-Tableaus)**

Ein Simplex-Tableau in kanonischer Normalform ist genau dann optimal, wenn es primal **und** dual zulässig ist.

- **zu den optimalen Lösungen von primalem und dualem Problem**

▶ 9

Satz (schwache & starke Dualität)

Gegeben seien das lineare Optimierungsproblem (LP) in Standardform und das zugehörige duale Programm (LP*) wie folgt:

$$\text{(LP)} \quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases} \qquad \text{(LP}^\star\text{)} \quad \begin{cases} \text{minimiere} & F^\star(\vec{\lambda}) = \vec{b}^{\,T}\vec{\lambda} \\ \text{u.d.N} & A^T\vec{\lambda} \geq \vec{c} \\ & \vec{\lambda} \geq \vec{0} \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt

i.) die *schwache Dualität:*
Ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ eine zulässige Lösung von (LP) und ist $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ eine zulässige Lösung von (LP*), so ist

$$F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \;\leq\; \vec{b}^{\,T}\vec{\lambda} = F^\star(\vec{\lambda})$$

ii.) die *starke Dualität:*
Ist $\vec{\hat{x}} \in \mathbb{R}^n$ eine zulässige Lösung von (LP) und ist $\vec{\hat{\lambda}} \in \mathbb{R}^m$ eine zulässige Lösung von (LP*), dann sind $\vec{\hat{x}}$ und $\vec{\hat{\lambda}}$ jeweils optimale Lösungen **falls gilt** $F(\vec{\hat{x}}) = F^\star(\vec{\hat{\lambda}})$.

iii.) jeder der Aussagen:

- Falls (LP) **und** (LP*) zulässige Lösungen besitzen, dann besitzen beide auch optimale Lösungen und es gilt $F_{\max} = F^\star_{\min}$
- Ist die Zielfunktion F von (LP) nach oben nicht beschränkt, so besitzt (LP*) keine zulässigen Lösungen.
- Ist die Zielfunktion $F^\star$ von (LP*) nach unten nicht beschränkt, so besitzt (LP) keine zulässigen Lösungen.

▶ 13

Dr. rer. nat. M. Striebel

Bemerkungen

- zu i.) Klar aus Motivation für Dualität: ▶ 10

  für jedes in (LP^*) zulässige $\vec{\lambda}$ ist $F^*(\vec{\lambda})$ eine obere Schranke für den in (LP) erreichbaren Zielfunktionswert

  formal: $\forall \vec{\lambda}$ zulässig in (LP^*) gilt: $F^*(\vec{\lambda}) \geq F(\vec{x}) \quad \forall \vec{x}$ zulässig in (LP)

- zu ii) Klar aus: ▶ 11

  - $\hat{\vec{x}}$ optimale Lsg. von (LP)

    $\Leftrightarrow$ $F(\hat{\vec{x}})$ obere Schranke für Zielfunktionswert in (LP)

    d.h.: $F(\vec{x}) \leq F(\hat{\vec{x}}) \quad \forall \vec{x}$ zulässig in (LP)

  - $\hat{\vec{\lambda}}$ optimale Lsg. von (LP^*)

    $\Leftrightarrow$ $F^*(\hat{\vec{\lambda}})$ kleinste obere Schranke für Zielfunktionswert in (LP)

    d.h. $F(\vec{x}) \leq F^*(\hat{\vec{\lambda}}) \quad \forall \vec{x}$ zulässig in (LP)

    und $\nexists \tilde{\vec{\lambda}}$ zulässig in (LP^*): $F^*(\tilde{\vec{\lambda}}) < F^*(\hat{\vec{\lambda}})$

  somit muss gelten: $F(\hat{\vec{x}}) = F(\hat{\vec{\lambda}})$

- Folgerung aus i.) & ii.): ▶ 12

  $\forall \vec{x}$ zulässig von (LP), $\forall \vec{\lambda}$ zulässig von (LP^*) gilt:

  $$F(\vec{x}) \leq F_{max} = F^*_{min} \leq F^*(\vec{\lambda}) \qquad \text{(Einschließungssatz)}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

- die Strukturvariablen des einen Problems korrespondieren mit den Schlupfvariablen des anderen

Satz (Satz vom komplementären Schlupf)

▶ 14

Gegeben seien das lineare Optimierungsproblem (LP) in Standardform und das zugehörige duale Programm (LP*) wie folgt:

$$(\text{LP}) \quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{u.d.N} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases} \qquad (\text{LP}^*) \quad \begin{cases} \text{minimiere} & F^*(\vec{\lambda}) = \vec{b}^T \vec{\lambda} \\ \text{u.d.N} & A^T \vec{\lambda} \geq \vec{c} \\ & \vec{\lambda} \geq \vec{0} \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Zudem seien $\widetilde{(\text{LP})}$ und $\widetilde{(\text{LP}^*)}$ die daraus, durch Einführung von Schlupfvariablen $\vec{x}_s \in \mathbb{R}^m$ bzw. $\vec{\lambda}_s \in \mathbb{R}^n$ hervorgegangenen linearen Probleme in kanonischer Normalform, d. h.

$$\widetilde{(\text{LP})} \quad \begin{cases} \text{maximiere} & \vec{c}^T \vec{x} + \vec{0}_m^T \vec{x}_s \\ \text{u.d.N} & A\vec{x} + E_m \vec{x}_s = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0}_n \\ & \vec{x}_s \geq \vec{0}_m \end{cases} \qquad \widetilde{(\text{LP}^*)} \quad \begin{cases} \text{minimiere} & \vec{b}^T \vec{\lambda} + \vec{0}_n^T \vec{\lambda}_s \\ \text{u.d.N} & A^T \vec{\lambda} - E_n \vec{\lambda}_s = \vec{c} \\ & \vec{\lambda} \geq \vec{0}_m \\ & \vec{\lambda}_s \geq \vec{0}_n \end{cases}$$

mit Einheitsmatrizen E_m bzw. E_n und Nullvektoren $\vec{0}_m$ bzw. $\vec{0}_n$.

Dann sind zulässige Lösungen $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ bzw. $\begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$ von $\widetilde{(\text{LP})}$ bzw. $\widetilde{(\text{LP}^*)}$ genau dann optimal, wenn gilt

$$x_i \cdot \lambda_{s,i} = 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \lambda_k \cdot x_{s,k} = 0 \;\; \forall\, k = 1, \ldots, m$$

Produkt der i-ten Strukturvariable von $\widetilde{(\text{LP})}$ mit der i-ten Schlupfvariable von $\widetilde{(\text{LP}^*)}$

Produkt der k-ten Strukturvariable von $\widetilde{(\text{LP}^*)}$ mit der k-ten Schlupfvariable von $\widetilde{(\text{LP})}$

▶ 15

Bedeutung: sind $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_s \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}$ optimale Lösungen, dann ist

- bei positiver i-ter Strukturvariable von $\widetilde{(\text{LP})}$ die i-te Schlupfvariable von $\widetilde{(\text{LP}^*)}$ gleich Null:

$$x_i > 0 \Rightarrow \lambda_{s,i} = 0$$

- bei positiver i-ter Schlupfvariable von $\widetilde{(\text{LP}^*)}$ die i-te Strukturvariable von $\widetilde{(\text{LP})}$ gleich Null:

$$\lambda_{s,i} > 0 \Rightarrow x_i = 0$$

- bei positiver k-ter Strukturvariable von $\widetilde{(\text{LP}^*)}$ die k-te Schlupfvariable von $\widetilde{(\text{LP})}$ gleich Null:

$$\lambda_k > 0 \Rightarrow x_{s,k} = 0$$

- bei positiver k-ter Schlupfvariable von $\widetilde{(\text{LP})}$ die i-te Strukturvariable von $\widetilde{(\text{LP}^*)}$ gleich Null:

$$x_{s,k} > 0 \Rightarrow \lambda_k = 0$$

Beispiel - Fortsetzung

▶ 16

- bekannt: optimale Lösungen:

$$\hat{\vec{x}} = (10, 70, 0, 0, 130)^T \quad \& \quad \hat{\vec{\lambda}} = (5, 5, 0, 0, 0)^T$$

Strukturvariablen: $\begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix}$ Schlupfvariablen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 130 \end{pmatrix}$

Strukturvariablen: $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ Schlupfvariablen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_i \cdot \lambda_{s,i}$ für $i = 1,2$: $10 \cdot 0 = 0$, $70 \cdot 0 = 0$

$\lambda_k \cdot x_{s,k}$ für $k = 1,2,3$: $5 \cdot 0 = 0$, $5 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 130 = 0$ ✓

Dr. rer. nat. M. Striebel

- weitere zulässige Lösungen

  - für $(\widetilde{LP})$: $\vec{x}^{\,1} = (0, 75, 5, 0, 175)^T$

    Strukturvariablen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 75 \end{pmatrix}$

    Schlupfvariablen: $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 175 \end{pmatrix}$

  - für $(\widetilde{LP}^*)$: $\vec{\lambda}^{\,1} = (0, \frac{20}{3}, \frac{5}{9}, 0, 0)^T$

    Strukturvariablen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 20/3 \\ 5/9 \end{pmatrix}$

    Schlupfvariablen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

hier ist: $\lambda_3 \cdot x_{s,3} = \frac{5}{9} \cdot 175 \neq 0$

d.h. positive Strukturvariable trifft auf positive Schlupfvariable

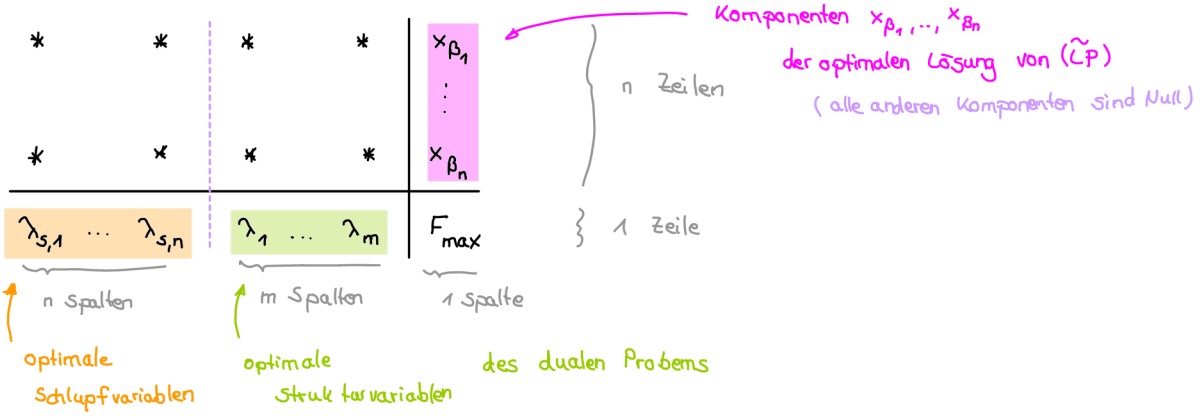
d.h. $\vec{x}^{\,1}$ & $\vec{\lambda}^{\,1}$ bilden kein Paar optimaler Lösungen von $(\widetilde{LP})$ und $(\widetilde{LP}^*)$

- auch z.B. $\vec{\hat{x}}$ & $\vec{\lambda}^{\,1}$ bilden kein Paar optimaler Lösungen nach dem Satz vom komplementären Schlupf.

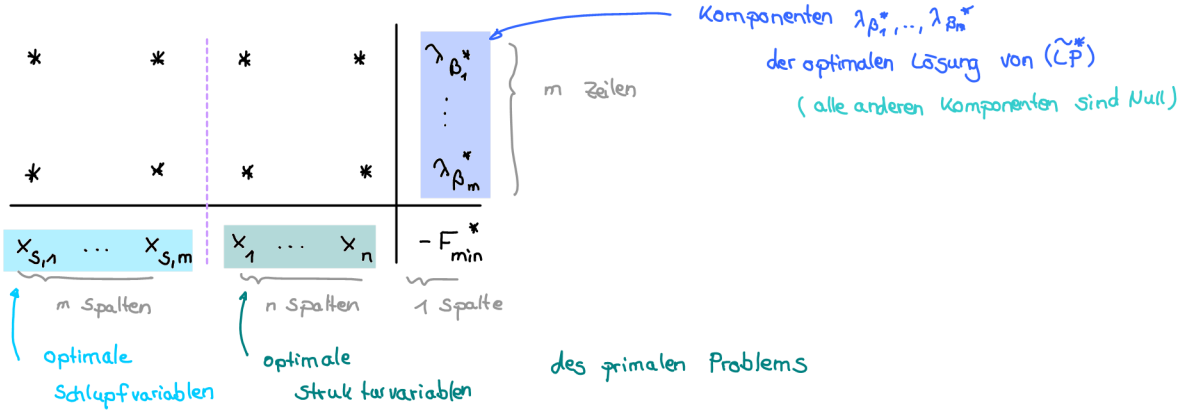
- das optimale Simplex-Tableau des einen Problems enthält auch immer eine optimale Lösung des anderen

▶ 17

aus optimalem Tableau zum primalen Problem (LP) bzw. $(\widetilde{LP})$



aus optimalem Tableau zum dualen Problem (LP^*) bzw $(\widetilde{LP}^*)$



Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiele:

▶ 18

i)

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2 \\ \text{u.d.N.} & 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \le 80 \\ & 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 150 \\ & 6x_1 + 3x_2 \le 400 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

optimales Tableau

$$T_2 := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & 1 & 130 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 1150 \end{array}\right), \quad \vec{\beta} = (1,2,5)^T$$

Somit: $\vec{x}_{opt} = (10, 70, 0, 0, 130)^T$

Strukturvariablenteil: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix}$

Schlupfvariablenteil: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 130 \end{pmatrix}$

$F_{max} = 1150$

$$\begin{cases} \text{minimiere} & F^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 80\cdot\lambda_1 + 150\cdot\lambda_2 + 400\cdot\lambda_3 \\ \text{u.d.N.} & 1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + \lambda_3 \ge 10 \\ & 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 3\lambda_3 \ge 15 \\ & \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$$

optimales Tableau

$$T_2^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 9 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 130 & 10 & 70 & -1150 \end{array}\right), \quad \vec{\beta}^* = (1,2)^T$$

Somit $\vec{\lambda}_{opt} = (5,5,0,0,0)^T$

Strukturvariablenteil: $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schlupfvariablenteil: $\vec{\lambda}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-F^*_{min} = -1150 \Rightarrow F^*_{min} = 1150$

▶ 19

ii)

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \text{u.d.N.} & 9x_1 + 8x_2 \le 7 \\ & 10x_1 + 8x_2 \le 2 \\ & 7x_1 + 4x_2 \le 8 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

optimales Tableau

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 5/4 & 1 & 0 & 1/8 & 0 & 1/4 \\ 2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 7 \\ \hline 3/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{array}\right), \quad \vec{\beta} = (3,2,5)^T$$

$F_{max} = 1/2$

$\vec{x}_{opt} = (0, 1/4, 5, 0, 7)^T$

Strukturvariablen $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

Schlupfvariablen $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \text{minimiere} & F^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 7\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ \text{u.d.N.} & 9\lambda_1 + 10\lambda_2 + 7\lambda_3 \ge 1 \\ & 8\lambda_1 + 8\lambda_2 + 4\lambda_3 \ge 2 \\ & \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$$

optimales Tableau

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -5/4 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/8 & 1/4 \\ \hline 5 & 0 & 7 & 0 & 1/4 & -1/2 \end{array}\right), \quad \vec{\beta}^* = (4,2)^T$$

$-F^*_{min} = -1/2 \Rightarrow F^*_{min} = 1/2$

$\vec{\lambda}_{opt} = (0, 1/4, 0, 3/2, 0)^T$

Strukturvariablen $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schlupfvariablen $\vec{\lambda}_S = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

▶ 20 im Video: Schlußworte

Dr. rer. nat. M. Striebel