Ökonomische Interpretation

▶ 1

... von Standard-Maximierungsproblemen

$$(LP)\quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Wir setzen voraus:

- $\operatorname{rang}(A) = m$ (somit $m \leq n$)
- (LP) ist eindeutig lösbar

▶ 2

Wir gehen im Weiteren davon aus, dass (LP) im Zuge einer Produktionsplanung entstanden ist, bei der der Gesamtgewinn von Produktion und Verkauf von n Produkten $P_1, \dots, P_n$ maximiert werden soll unter Beachtung der Problematik, dass die Produktion der Güter den Einsatz von m Ressourcen $R_1, \dots, R_m$ benötigt, die nur in beschränktem Maße zur Verfügung stehen.

Damit ergeben sich folgende Interpretationen und Begriffe

▶ 3

- Inputfaktoren / Produktionsfaktoren: Ressourcen $R_1, \dots, R_m$
- Outputfaktoren: Produkte $P_1, \dots, P_n$
- Produktionsmengen: $x_1, \dots, x_n \triangleq$ produzierte Mengeneinheiten der Outputfaktoren
- Gewinnfunktion: Zielfunktion $F(x_1, \dots, x_n)$
- Deckungsbeiträge / Bruttogewinne: Koeffizienten der Zielfunktion: $c_1, \dots, c_n$
- Kapazitäten der Inputfaktoren: Begrenzungskoeffizienten der Nebenbedingungen: $b_1, \dots, b_m$
- Produktionskoeffizienten: Koeffizienten der NBen: $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$

  für $i = 1, \dots, m$ besagt die i-te NB, dass bei der Produktion der Produktionsmengen $x_1, \dots, x_n$ die Kapazitätsgrenze b_i der Ressource R_i nicht überschritten werden kann

  d.h. ist die i-te NB erfüllt, so wurde die Ressource R_i komplett aufgebraucht oder es verblieb ein Rest:

  $$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \iff \underbrace{b_i - (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)}_{= \text{Wert der Schlupfvariable } x_{si}} \geq 0$$

- Ressourcenausnutzung (bei Entscheidung $x_1, \dots, x_n$): Schlupfvariable $x_{s1}, \dots, x_{sm}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiel ①

▶ 4

(LP1)

maximiere $F(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2$

u.d.N.
$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 80$$
$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 150$$
$$6x_1 + 3x_2 \leq 400$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

2 Produkte, d.h. 2 Outputfaktoren

3 Ressourcen, d.h. 3 Inputfaktoren

Siehe: begleitendes Beispiel – Produktionsplanung

normalisierte Form:

maximiere $10x_1 + 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

u.d.N.
$$x_1 + x_2 + x_3 = 80$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 150$$
$$6x_1 + 3x_2 + x_5 = 400$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

Schlupfvariablen:

$x_{s,1} = x_3,\ x_{s,2} = x_4,\ x_{s,3} = x_5$

optimales Tableau

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & 1 & 130 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 1150 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{\beta} = (1, 2, 5)^T$$

somit $F_{max} = 1150$

optimale Lösung: $\vec{x}_{opt} = (10, 70, 0, 0, 130)^T$

mit optimaler Entscheidung: $\hat{\vec{x}}_{opt} = (10, 70)^T$

zugehörige Schlupfvariablen: $\vec{x}_s = (0, 0, 130)^T$

▶ 5

Interpretation:

Bei der Produktion von 10 Mengeneinheiten (ME) von P_1 und 70 ME von P_2

- ergibt sich der größtmögliche Gewinn in Höhe von 1150 Geldeinheiten (GE).
- werden die Ressourcen R_1 und R_2 vollständig aufgebraucht
- bleiben von der Ressource R_3 130 ME übrig

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiel (2): ▶ 6

$$(LP2)\quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, x_2, x_3) = 16x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N.} & 10x_1 + 12x_2 \leq 160 \\ & 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 \leq 560 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 400 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3 Produkte, d.h. 3 Outputfaktoren
3 Ressourcen, d.h. 3 Inputfaktoren

normalisierte Form:

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & 16x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ \text{u.d.N.} \quad & 10x_1 + 12x_2 + x_4 = 160 \\ & 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_5 = 560 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 + x_6 = 400 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Schlupfvariablen:

$x_{S,1} = x_4,\ x_{S,2} = x_5,\ x_{S,3} = x_6$

optimales Tableau:

1	1,2	0	0,1	0	0	16
0	8,2	0	−0,15	1	−0,25	436
0	−0,25	1	−0,0625	0	0,0625	15
0	15,2	0	1,1	0	0,5	376

mit $\vec{\beta} = (1,5,3)^T$

somit $F_{max} = 376$

optimale Lösung: $\vec{x}_{opt} = (16, 0, 15, 0, 436, 0)^T$

mit optimaler Entscheidung: $\hat{\vec{x}}_{opt} = (16, 0, 15)^T$

zugehörige Schlupfvariablen: $\vec{x}_S = (0, 436, 0)^T$

▶ 7 Interpretation

Entscheidet man sich, 16 ME von P_1 und 15 ME von P_3 zu produzieren und auf die Produktion von P_2 zu verzichten, dann

- ergibt sich der maximal mögliche Gewinn in Höhe von 376 GE
- werden die Ressourcen R_1 und R_3 komplett aufgebraucht
- bleiben von der Ressource R_2 436 ME übrig

▶ 8 im Video: qualitativer Vergleich der beiden Beispiele

▶ 9 im Video: Fragestellungen, die sich aus den Betrachtungen ergeben

Dr. rer. nat. M. Striebel

Unter den obigen Voraussetzungen und Vorgaben lässt sich zunächst festhalten: ▶ 10

- Von den insgesamt $n+m$ (Struktur, Schlupf) Variablen haben im zulässigen Fall höchstens m einen von Null verschiedenen Wert und mindestens n Variablen haben den Wert 0.

- Der Wert 0 bedeutet
  - bei einer Strukturvariable, dass das entsprechende Produkt nicht hergestellt wird, d.h. der entsprechende Outputfaktor ist nicht rentabel
  - bei einer Schlupfvariable, dass die entsprechende Ressource komplett aufgebraucht wird, d.h. der entsprechende Inputfaktor ist knapp

- Ein positiver Variablenwert bedeutet
  - bei einer Strukturvariable, dass vom zugehörigen Produkt entsprechend viele ME produziert werden, d.h. der entsprechende Outputfaktor ist gewinnbringend
  - bei einer Schlupfvariable, dass von der zugehörigen Ressource entsprechend viele ME übrig bleiben, d.h. der entsprechende Inputfaktor ist nicht knapp.

Von Opportunitätskosten, Schattenpreisen und reduzierten Kosten ▶ 11

beispielhafte Betrachtungen

zu Beispiel (1)

ausgehend vom optimalen Tableau ergibt sich

(Nicht-Basis-Variablen: x_{S_1}, x_{S_2})

x_1	x_2	x_{S_1}	x_{S_2}	x_{S_3}	
1	0	2	−1	0	10
0	1	−1	1	0	70
0	0	−9	3	1	130
0	0	5	5	0	1150

▶ 12 mit $\vec{\beta} = (1, 2, 5)^T$

▶ 13 $F(\vec{x}) = 1150 - 5 \cdot x_{S_1} - 5 \cdot x_{S_2}$ ← Gewinn hängt ab von den knappen Ressourcen R_1, R_2

wobei wegen $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \\ 130 \end{pmatrix} + x_{S_1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + x_{S_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

x_{S_1} & x_{S_2} nur so gewählt werden dürfen, dass sich $\vec{x} \geq \vec{0}$ ergibt

▶ 14 beispielhafte Interpretation:

würde verlangt werden, dass x_{S_1} ME von R_1 frei gehalten werden müssen, d.h. nicht für die Produktion von P_1 und P_2 verwendet werden dürfen, dann würde sich der Gewinn um $5 \cdot x_{S_1}$ GE reduzieren ▶ 16

Insbesondere reduziert sich der Gewinn um (5) GE bei Reduktion der Kapazität von R_1 um 1 ME.

D.h. 1 ME von Ressource R_1 kostet 5 GE

(Kosten im Sinne eines entgangenen Gewinns)

▶ 17 (+ weitere Überlegungen im Video)

↑ man bezeichnet dies als Schattenpreis bzw. inputorientierte Opportunitätskosten von R_1

▶ 15 im Video:
Berechnung über angepasstes LP und Simplex-Verfahren via Matlab-Implementierung

Dr. rer. nat. M. Strieglel

zu Beispiel (2)

Nicht-Basis-Variable ▶ 18

x_1	x_2	x_3	x_{s_1}	x_{s_2}	x_{s_3}	
1	1,2	0	0,1	0	0	16
0	8,2	0	−0,15	1	−0,25	436
0	−0,25	1	−0,0625	0	0,0625	15
0	15,2	0	1,1	0	0,5	376

mit $\vec{\beta} = (1,5,3)^T$

ausgehend vom optimalen Tableau

ergibt sich:

▶ 19 $F(\vec{x}) = 376 - 15{,}2 \cdot x_2 - 1{,}1 \cdot x_{s,1} - 0{,}5\, x_{s,3}$

Gewinn hängt ab von den knappen Inputfaktoren R_1 & R_3 und vom unrentablen Outputfaktor P_2

?

wobei wegen $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 436 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 1 \\ 0{,}25 \\ 0 \\ -8{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{s_1} \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0 \\ 0{,}0625 \\ 1 \\ 0{,}15 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{s_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}0625 \\ 0 \\ 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}$

x_2, x_{s_1}, x_{s_3} nur so gewählt werden dürfen, dass $\vec{x} \geq 0$ gilt

sofort ersichtlich: Schattenpreise / inputorientierte Opportunitätskosten (der Ressourcen)

▶ 20

- R_1 : 1,1
- R_2 : 0 ← R_2 ist nicht knapp
- R_3 : 0,5

▶ 21 weitere beispielhafte Fragestellungen:

Um wieviele GE würde sich der Gewinn reduzieren, wenn verlangt würde, dass ...

▶ 22 i) vom unrentablen Produkt P_2 x_2 ME hergestellt (aber nicht verkauft) werden?

Variante 1: Aufstellung eines angepassten LPs ▶ 23

$$(LP2)\quad \begin{cases} \text{maximiere } F(x_1,x_2,x_3) = 16x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N. } 10x_1 + 12x_2 \leq 160 \\ 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 \leq 560 \\ 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 400 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

hier für Forderung nach einer ME von P_2

P_2 wird nicht verkauft

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \text{maximiere } F(x_1,x_2,x_3) = 16 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N. } 10x_1 + 12x_2 \leq 160 \\ 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 \leq 560 \\ 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 400 \\ x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

es ergibt sich: $\tilde{F}_{max} = 358{,}8$ bei $(x_1,x_2,x_3)^T = (14{,}8;\ 1;\ 15{,}25)^T$

Antwort (bei Forderung nach Produktion von 1 ME von P_2)

Der Gewinn reduziert sich um $\Delta F = 376 - 358{,}8 = 17{,}2$ GE

(bei Forderung nach 2 ME von P_2 ergibt sich $\Delta F = 376 - 341{,}6 = 34{,}4$)

Dr. rer. nat. M. Striebel

▶ 24 Variante 2 : basierend auf dem optimalen Tableau

$F(\vec{x}) = 376 - 15{,}2\, x_2$ gültig für $0 \le x_2 \le 13{,}\overline{3}$ ▶ 25 zum Gültigkeitsbereich

↑ maximal möglicher Gewinn, wenn genau x_2 ME von Outputfaktor P_2 produziert und verkauft werden sollen ▶ 26

wegen $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 436 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 1 \\ 0{,}25 \\ 0 \\ -8{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} \ge \vec{0}$

↑ d.h. F_{max} bzgl.

$$\begin{aligned} \text{maximiere } & F(x_1, x_2, x_3) = 16 \cdot x_1 + 2\, x_2 + 8\, x_3 \\ \text{u.d.N. } & 10x_1 + 12x_2 \le 160 \\ & 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 \le 560 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \le 400 \\ & x_2 = x_2 \quad \text{für } 0 \le x_2 \le 13{,}\overline{3} \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Zwischenergebnis:

Würde man x_2 ME von P_2 produzieren und verkaufen, so würde sich der Gewinn um $15{,}2 \cdot x_2$ GE reduzieren

insbesondere: 1 ME von P_2 reduziert den Gewinn (bei Verkauf) um 15,2 GE

↑ man bezeichnet diesen Wert als reduzierte Kosten des Outputfaktors P_2 ▶ 27

▶ 28 somit ergibt sich der maximal mögliche Gewinn bei erzwungener Produktion von x_2 ME von P_2 ohne Verkauf / Gewinnerwirtschaftung zu:

$\tilde{F}_{max} = 376 - 15{,}2\, x_2 - 2 \cdot x_2$ (15,2: reduzierte Kosten; 2: Deckungsbeitrag)

$= 376 - (15{,}2 + 2)\, x_2 = 376 - 17{,}2\, x_2$

z.B. für $x_2 = 1$: $\tilde{F}_{max} = 376 - 17{,}2 = 358{,}8$ (vgl. Variante 1)

Antwort:

Der Gewinn reduziert sich, bei erzwungener Produktion ohne Verkauf von x_2 ME des unrentablen Produkts P_2 um:

$(15{,}2 + 2) \cdot x_2 = 17{,}2 \cdot x_2$ GE (15,2: reduzierte Kosten; 2: Deckungsbeitrag)

▶ 29 Insbesondere reduziert sich der Gewinn bei 1 ME von P_2 um

$15{,}2 + 2 = 17{,}2$ GE

↑ man bezeichnet dies als outputorientierte Opportunitätskosten von P_2

Dr. rer. nat. M. Striebel

▶ 30 ii) Vom rentablen Produkt P_3 zusätzliche Δx_3 ME hergestellt (aber nicht verkauft) werden?

Hier muss ein angepasstes LP aufgestellt und gelöst werden!

ausgehend von

$$(LP2)\quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, x_2, x_3) = 16x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N.} & 10x_1 + 12x_2 \leq 160 \\ & 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 \leq 560 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 400 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

mit optimaler Produktionsentscheidung $\hat{\vec{x}}_{opt} = (16, 0, 15)^T$ und $F_{max} = 376$

wäre für gegebenes Δx_3 das LP

$$(LP2^*)\quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, x_2, x_3) = 16x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N.} & 10x_1 + 12x_2 \leq 160 \\ & 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 \leq 560 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 400 \\ & \boxed{x_3 = 15 + \Delta x_3} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

▶ 31

Von P_3 sollen zusätzliche Δx_3 ME produziert werden

zu lösen.

Vom entsprechenden Gewinn $\tilde{F}_{max}$ ist dann der Verkauf der Δx_3 ME von P_3 abzuziehen: $\tilde{F}_{max} - 8 \cdot \Delta x_3$ (8: Deckungsbeitrag von P_3)

Antwort:

Der Gewinn reduziert sich, bei erzwungener Produktion ohne Verkauf von zusätzlichen Δx_3 ME des rentablen Produkts P_3 um:

$$376 - (\tilde{F}_{max} - 8 \cdot \Delta x_3)$$

($\tilde{F}_{max}$: maximaler Zielfunktionswert von $(LP2^*)$; 8: Deckungsbeitrag von P_3)

▶ 32

↳ insbesondere ergeben sich für $\Delta x_3 = 1$ die outputorientierten Opportunitätskosten von P_3

Beispielrechnung mittels Matlab für $\Delta x_3 = 1$:

▶ 33

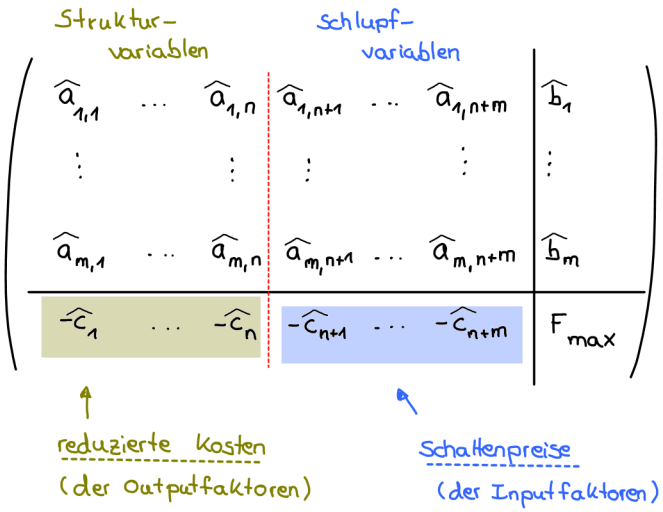
- $\tilde{F}_{max} = 358,4$
- somit outputorientierte Opportunitätskosten von P_3: 25,6 GE

Dr. rer. nat. M. Striebel

Zusammenfassung ▶ 34

▶ 35

- Interpretation der Einträge im optimalen Simplextableau für ein Standard-Maximierungsproblem der Form (LP)



geben, falls „>0" Gewinneinbuße an, je...

... produzierter & verkaufter ME eines unrentablen Produktes

... zurückgehaltener ME einer knappen Ressource

▶ 36

Opportunitätskosten ($\hat{=}$ entgangener Gewinn)

- inputorientiert: Gewinneinbuße je zurückgehaltener ME einer Ressource
  = Schattenpreis des Inputfaktors

- outputorientiert: Gewinneinbuße je zwangsweise produzierter & nicht verkaufter ME eines Outputfaktors

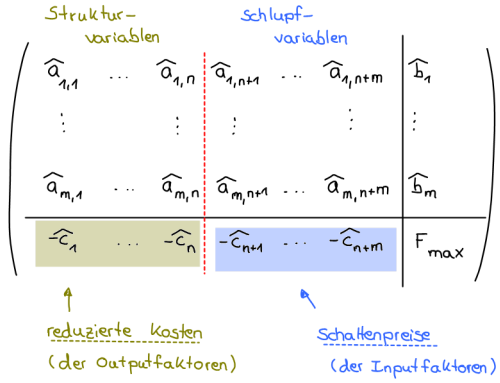
  → bei unrentablem Produkt bestimmt durch:
  „reduzierte Kosten + Deckungsbeitrag" ($=-\hat{c}_i + c_i$)

  → bei rentablem Produkt bestimmbar durch angepasstes LP

Dr. rer. nat. M. Striebel

- **Dualität**

▶ 37



▶ 38

optimale Schlupfvariablen — optimale Strukturvariablen — des dualen Problems

→ Das Ziel des dualen Problems ist die Minimierung der gesamten inputorientierten Opportunitätskosten unter der Nebenbedingung, dass die Schattenpreise allesamt nicht negativ sind!

▶ 39

→ Bei optimaler Produktionsplanung ist der Gesamtgewinn der Outputfaktoren gleich den gesamten Opportunitätskosten der Inputfaktoren (siehe starke Dualität)

▶ 40

→ zum Satz vom komplementären Schlupf:

▶ 41

▶ 42

(I) $x_i \cdot \lambda_{s,i} = 0 \quad \forall\, i = 1,\dots,n$

$\Leftrightarrow x_i \left(a_{1i}\lambda_1 + \dots + a_{ji}\lambda_j + \dots + a_{mi}\lambda_m - c_i \right) \quad \forall\, i = 1,\dots,n$

c_i: Deckungsbeitrag des Produktes P_i

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$: Schattenpreise der Ressourcen $R_1, \dots, R_m$

x_i: produzierte Menge des Produktes P_i

- $x_i = 0 \Rightarrow a_{1i}\lambda_1 + \dots + a_{mi}\lambda_m > c_i$

  P_i unrentabel

  Gesamtopportunitätskosten der benötigten Ressourcen übersteigt Deckungsbeitrag

- $x_i > 0 \Rightarrow a_{1i}\lambda_1 + \dots + a_{mi}\lambda_m = c_i$

  P_i rentabel

  Gesamtopportunitätskosten der benötigten Ressourcen ist gleich dem Deckungsbeitrag

Dr. rer. nat. M. Striebel

▶ 43

$$\lambda_k \cdot x_{S,k} = 0 \qquad \forall\, k = 1,\dots,m$$

verbliebener Rest der Ressource R_k nach Produktion

$$\Leftrightarrow \lambda_k \left(b_k - (a_{k,1} \cdot x_1 + \dots + a_{k,n} \cdot x_n) \right) = 0 \qquad \forall\, k = 1,\dots,m$$

b_k: Kapazität der Ressource R_k

$(a_{k,1} \cdot x_1 + \dots + a_{k,n} \cdot x_n)$: verbrauchte Menge der Ressource R_k

λ_k: Schattenpreis der Ressource R_k

- $a_{k,1} x_1 + \dots + a_{k,n} \cdot x_n = b_k \Rightarrow \lambda_k > 0$

  R_k ist knapp

  R_k hat Schattenpreis, d.h. ist „wertvoll"

- $a_{k,1} x_1 + \dots + a_{k,n} \cdot x_n < b_k \Rightarrow \lambda_k = 0$

  R_k ist nicht knapp, d.h. im übermaß vorhanden

  R_k hat keinen „Preis"

▶ 44 Abschlußbemerkungen

Dr. rer. nat. M. Striebel