Eröffnungsverfahren zur Lösung des klassischen Transportproblems

▶ 1

▶ 2 Ausgangspunkt: • Transportproblem (TP)

$$\begin{cases} \text{minimiere} \quad F(x_{11},\dots,x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \\ \text{udN.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in \{1,\dots,m\} \\ \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in \{1,\dots,n\} \\ \qquad x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

spezifiziert durch Angabe von

- Angebotsvektor $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{R}^m$
- Nachfragevektor $\vec{b} = (b_j) \in \mathbb{R}^n$
- Kostenmatrix $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Grundvoraussetzung $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ sei erfüllt

• „leeres" Tableau – Tableau ohne Plan

nicht zulässige Transportmatrix $X = 0_{m\times n}$

Empfänger j

Sender i	1	2	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_n	

▶ 3 Ziel:

Empfänger j

Sender i	1	2	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_n	

„gefülltes" Tableau

zu zulässiger Transportmatrix $X_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

zu zulässiger $\boxed{\text{Basislösung}}$ $\vec{x}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$

höchstens $m+n-1$ von Null verschiedene Werte

mit Basisindexmenge $\mathcal{B} = \{\beta_1,\dots,\beta_q\}$ mit $q = m+n-1$

Spalten $\beta_1,\dots,\beta_q$ von $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n^T & 0_n^T & \cdots & 0_n^T \\ 0_n^T & \mathbb{1}_n^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n^T \\ 0_n^T & \cdots & 0_n^T & \mathbb{1}_n^T \\ E_n & E_n & \cdots & E_n \end{pmatrix}$ sind l.u.a.

▶ 4 unterschiedliche heuristische Verfahren bekannt.

in puncto Grundidee, Rechenaufwand, Güte

praktikable

keiner Theorie entsprungene

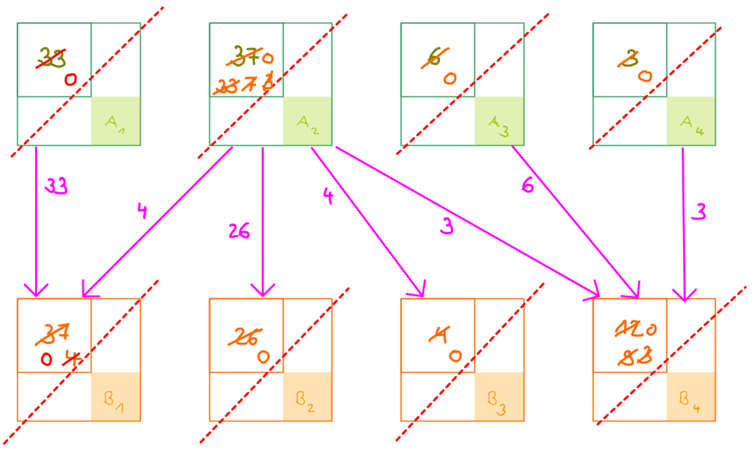
5 I.) <u>Nordwesteckenregel</u>

Grundidee: ohne Rücksicht auf die Kosten die Lager nacheinander räumen und die Nachfrager nacheinander zufriedenstellen.

6 beispielhafte Veranschaulichung:

gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 33 \\ 37 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 37 \\ 26 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 2 & 8 \\ 10 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Sender



Empfänger

somit: $x_{11} = 33,\ x_{21} = 4,\ x_{22} = 26,\ x_{23} = 4,\ x_{24} = 3,\ x_{34} = 6,\ x_{44} = 3$

alle anderen $x_{ij} = 0$

7 zugehörige Transportmatrix

$$X = \begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 26 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{Zeilensummen} \\ 33 \\ 37 \\ 6 \\ 3 \end{array} \;\hat{=}\; \vec{a} \checkmark$$

Spaltensummen $\quad 37 \quad 26 \quad 4 \quad 12$

$\hat{=}\; \vec{b}^T \checkmark$

8 zugehörige Indices: $\boxed{1, 5, 6, 7, 8, 12, 16}$ ← $m+n-1 = 4+4-1 = 7$ Indices ✓

Basisindizes, da zugehörige Spalten von A l.u.a. (und es 7 Werte sind)

somit: X erfüllt die Vorgaben (Zulässigkeit, Basislösung)

▶ 9 alternative Bestimmung mittels Transporttableau (am Beispiel vorgeführt)

Empfänger j

Sender i	1	2	3	4	
1	6 / 33	2 / 0	5 / 0	5 / 0	~~33~~ 0 ← Sender ausgeschöpft
2	10 / 4	10 / 26	9 / 4	16 / 3	~~37~~ ~~33~~ ~~7~~ ~~3~~ 0 ← Sender ausgeschöpft
3	10 / 0	10 / 0	2 / 0	8 / 6	~~6~~ 0 ← Sender ausgeschöpft
4	10 / 0	7 / 0	1 / 0	9 / 3	~~3~~ 0 ← Sender ausgeschöpft
	~~37~~ ~~4~~ 0	~~26~~ 0	~~4~~ 0	~~12~~ ~~8~~ ~~3~~ 0	
	↑ Empfänger zufrieden	↑ Empfänger zufrieden	↑ Empfänger zufrieden	↑ Empfänger zufrieden	

zugehörige Transportmatrix

$$X = \begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 26 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mit entstehenden Transport Kosten:

$$6 \cdot 33 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 26 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 3$$

$$= 198 + 40 + 260 + 36 + 30 + 48 + 27 = 639$$

die anschließende Optimierungsphase startet mit dem

▶ 10 Starttableau

Empfänger j

Sender i	1	2	3	4	
1	6 / 33	2	5	5	33
2	10 / 4	10 / 26	9 / 4	16 / 3	37
3	10	10	2	8 / 6	6
4	10	7	1	9 / 3	3
	37	26	4	12	

Algorithmus – Nordwesteckenregel:

0.) Initialisierung:

- $x_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$
- $i := 1,\ j := 1$ ← Starte in Nordwest-Ecke
- $I := \{\}$ ← Menge zur Ablage der besuchten Felder

1.) Transportmenge von A_i nach B_j festlegen:

- $x_{ij} := \min(a_i, b_j)$ ← soviel wie möglich, aber nicht mehr als A_i hat & nicht mehr als B_j braucht
- $I = I \cup \{(i,j)\}$ ← Koordinaten des besuchten Feldes speichern

2.) Transport durchführen:

- $a_i := a_i - x_{ij}$ ← A_i hat x_{ij} ME weniger
- $b_j := b_j - x_{ij}$ ← B_j braucht x_{ij} ME weniger

3.) Wer braucht noch oder wer kann noch liefern?

falls $a_i = 0$, dann $i := i+1$ ← A_i erschöpft, bei nächstem Sender beschaffen

sonst $j := j+1$ ← B_j zufrieden, bei nächstem Empfänger abladen

alternativ:

falls $b_j = 0$, dann $j = j+1$ ← B_j zufrieden, bei nächstem Empfänger abladen

sonst $i := i+1$ ← A_i erschöpft, bei nächstem Sender beschaffen

4.) Nächster Sender, nächster Empfänger:

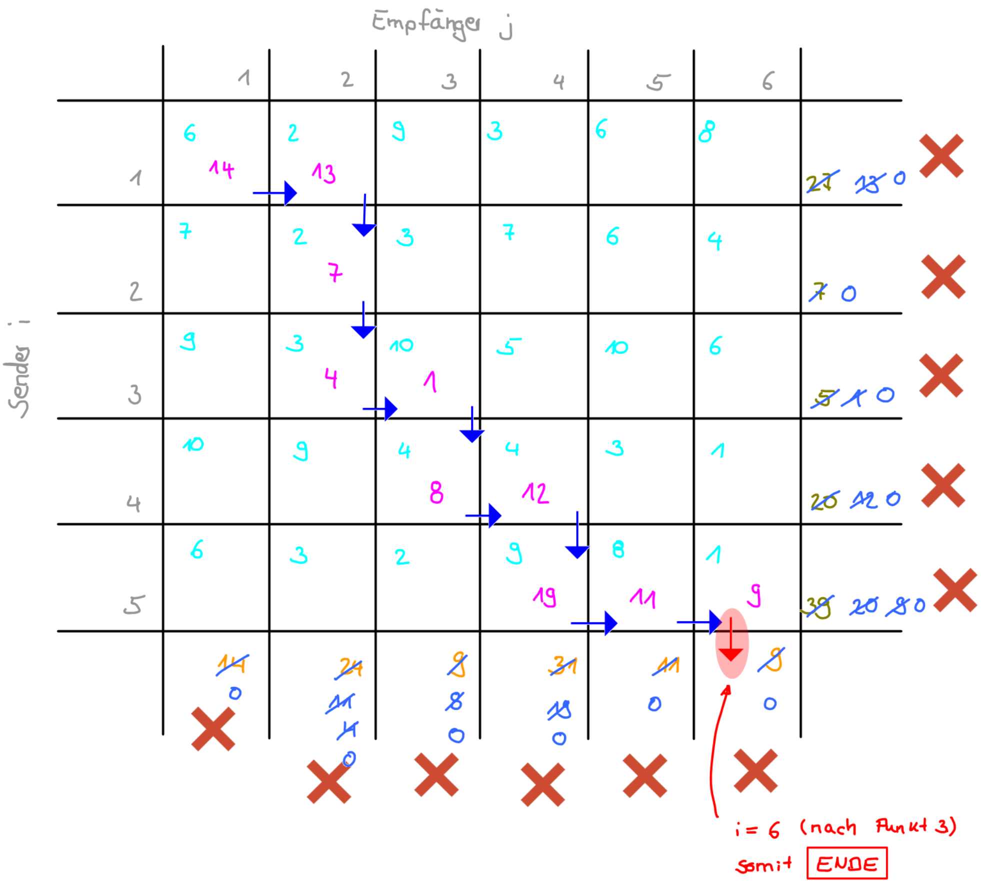
falls $i = m+1$ oder $j = n+1$,

dann:
- mit $I = \{(i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q)\}$ bestimme
  für $p = 1,\dots,q$:
  $\beta_p := (i_p - 1)\cdot n + j_p$ ← Basisindizes aus Adressen bestimmen
- $X_B = X$ ← zulässige Basislösung gefunden
- $\boxed{\text{ENDE}}$

sonst: weiter mit Schritt 1.)

Beispiele:

12 i) mit $\vec{a} = (27, 7, 5, 20, 39)^T$, $\vec{b} = (14, 24, 9, 31, 11, 9)^T$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 & 3 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 7 & 6 & 4 \\ 9 & 3 & 10 & 5 & 10 & 6 \\ 10 & 9 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$



Algorithmus – Nordwesteckenregel:

0.) Initialisierung:

- $x_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$
- $i := 1,\ j := 1$ ← Starte in Nordwest-Ecke
- $I := \{\}$ ← Menge zur Ablage der besuchten Felder

1.) Transportmenge von A_i nach B_j festlegen:

- $x_{ij} := \min(a_i, b_j)$ ← soviel wie möglich, aber nicht mehr als A_i hat & nicht mehr als B_j
- $I = I \cup \{(i,j)\}$ ← Koordinaten des besuchten Feldes speichern

2.) Transport durchführen:

- $a_i := a_i - x_{ij}$ ← A_i hat x_{ij} ME weniger
- $b_j := b_j - x_{ij}$ ← B_j braucht x_{ij} ME weniger

3.) Wer braucht noch oder wer kann noch liefern?

falls $a_i = 0$, dann $i := i+1$ ← A_i erschöpft, bei nächstem Sender
sonst $j := j+1$ ← B_j zufrieden, bei nächstem Empfä

alternativ:

falls $b_j = 0$, dann $j = j+1$ ← B_j zufrieden, bei nächstem
sonst $i := i+1$ ← A_i erschöpft, bei nächstem

4.) Nächster Sender, nächster Empfänger:

falls $i = m+1$ oder $j = n+1$,
dann:
- mit $I = \{(i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q)\}$ bestimme
  für $p = 1, \dots, q$:
  $\beta_p := (i_p - 1) \cdot n + j_p$ ← Basisindizes
- $X_B = X$ ← zulässige Basislösung gefunden
- $\boxed{\text{ENDE}}$

sonst: weiter mit Schritt 1.)

13 zu 4.)

mit
- $I = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (4,4), (5,4), (5,5), (5,6)\}$ $\quad (|I| = 10)$
  $10 = 5+6-1$
- $m = 5,\ n = 6$

ist

$\beta_1 = (1-1)\cdot 6 + 1 = 1$	$\beta_6 = (4-1)\cdot 6 + 3 = 21$
$\beta_2 = (1-1)\cdot 6 + 2 = 2$	$\beta_7 = (4-1)\cdot 6 + 4 = 22$
$\beta_3 = (2-1)\cdot 6 + 2 = 8$	$\beta_8 = (5-1)\cdot 6 + 4 = 28$
$\beta_4 = (3-1)\cdot 6 + 2 = 14$	$\beta_9 = (5-1)\cdot 6 + 5 = 29$
$\beta_5 = (3-1)\cdot 6 + 3 = 15$	$\beta_{10} = (5-1)\cdot 6 + 6 = 30$

man erhält hier:

zulässige Basislösung: $$X_B = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

zu den Basisindizes $\mathcal{B} = \{1, 2, 8, 14, 15, 21, 22, 28, 29, 30\}$

bzw $I = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (4,4), (5,4), (5,5), (5,6)\}$

und dem Starttableau zur Optimierungsphase

Empfänger j

Sender i	1	2	3	4	5	6	
1	6 / 14	2 / 13	9	3	6	8	27
2	7	2 / 7	3	7	6	4	7
3	9	3 / 4	10 / 1	5	10	6	5
4	10	9	4 / 8	4 / 12	3	1	20
5	6	3	2	9 / 19	8 / 11	1 / 9	39
	14	24	9	31	11	9	

mit Transportkosten:

$$F(X_B) = 6 \cdot 14 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 12 + 9 \cdot 19 + 8 \cdot 11 + 1 \cdot 9 = 494$$

▶ 47

▶ 14

i) mit $\vec{a} = (32, 39, 27, 2, 61)^T$, $\vec{b} = (34, 38, 28, 31, 30)^T$, $C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 10 & 3 & 10 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 10 & 9 \\ 10 & 10 & 5 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

ist $m = 5$, $n = 5$

Empfänger j

Sender i

i \ j	1	2	3	4	5	
1	9 / 32	1	2	2	7	~~32~~ 0
2	10 / 2	3 / 37	10	5	1	~~39~~ ~~37~~ 0
3	2	6 / 1	10 / 26	10	9	~~27~~ ~~26~~ 0
4	10	10	5 / 2	8	10	~~2~~ 0
5	7	10	9 / 0	10 / 31	7 / 30	~~61~~ ~~61~~ ~~30~~ 0
	~~34~~ ~~2~~ 0	~~38~~ ~~1~~ 0	~~28~~ ~~2~~ 0 0	~~31~~ 0	~~30~~ 0	

▶ 15

i = 6 nach 3.)

somit nach 4.)

$\boxed{\text{ENDE}}$

▶ 16

Algorithmus – Nordwesteckenregel:

0.) Initialisierung:

- $x_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$
- $i := 1$, $j := 1$ ← Starte in Nordwest-Ecke
- $I := \{\}$ ← Menge zur Ablage der besuchten Felder

1.) Transportmenge von A_i nach B_j festlegen:

- $x_{ij} := \min(a_i, b_j)$ ← soviel wie möglich, aber nicht mehr als A_i hat & nicht mehr als B_j b
- $I = I \cup \{(i,j)\}$ ← Koordinaten des besuchten Feldes speichern

2.) Transport durchführen:

- $a_i := a_i - x_{ij}$ ← A_i hat x_{ij} ME weniger
- $b_j := b_j - x_{ij}$ ← B_j braucht x_{ij} ME weniger

3.) Wer braucht noch oder wer kann noch liefern?

falls $a_i = 0$, dann $i := i+1$ ← A_i erschöpft, bei nächstem Sender bes

sonst $j := j+1$ ← B_j zufrieden, bei nächstem Empfänge

alternativ:

falls $b_j = 0$, dann $j = j+1$ ← B_j zufrieden, bei nächstem En

sonst $i := i+1$ ← A_i erschöpft, bei nächstem Se

4.) Nächster Sender, nächster Empfänger:

falls $i = m+1$ oder $j = n+1$,

dann:
- mit $I = \{(i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q)\}$ bestimme für $p = 1, \dots, q$: $\beta_p := (i_p - 1) \cdot n + j_p$ ← Basisindizes aus
- $X_B = X$ ← zulässige Basislösung gefunden
- $\boxed{\text{ENDE}}$

sonst: weiter mit Schritt 1.)

$I = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

mit $|I| = 9 = 5 + 5 - 1 = m + n - 1$

▶ 17

Ohne Besuch von Feld (5,3) wären nicht die notwendigen 9 Index-Paare gesetzt worden

es ergeben sich damit die 9 Basisindizes: ▶ 18

$\beta_1 = (1-1) \cdot 5 + 1 = 1$

$\beta_2 = (2-1) \cdot 5 + 1 = 6$

$\beta_3 = (2-1) \cdot 5 + 2 = 7$

$\beta_4 = (3-1) \cdot 5 + 2 = 12$

$\beta_5 = (3-1) \cdot 5 + 3 = 13$

$\beta_6 = (4-1) \cdot 5 + 3 = 18$

$\beta_7 = (5-1) \cdot 5 + 3 = 23$

$\beta_8 = (5-1) \cdot 5 + 4 = 24$

$\beta_9 = (5-1) \cdot 5 + 5 = 25$

man erhält hier:

- Basislösung $X_B = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & 30 \end{pmatrix}$

zu den Basisindizes:

$$\mathcal{B} = \{1, 6, 7, 12, 13, 18, 23, 24, 25\}$$

bzw. $I = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

- Starttableau für die Optimierungsphase

Empfänger j

Sender i	1	2	3	4	5	
1	9 32	1	2	2	7	32
2	10 2	3 37	10	5	1	39
3	2	6 1	10 26	10	9	27
4	10	10	5 2	8	10	2
5	7	10	9 0	10 31	7 30	61
	34	38	28	31	30	

diese Null ist wichtig!

▶ 19

mit Transportkosten:

$$F(X_B) = 9\cdot 32 + 10\cdot 2 + 3\cdot 37 + 6\cdot 1 + 10\cdot 26 + 5\cdot 2 + 9\cdot 0 + 10\cdot 31 + 7\cdot 30$$

$$= 1215$$

▶ 35

▶ 20 II.) Matrixminimum-Verfahren

Grundidee: Wähle jeweils günstigsten noch zur Verfügung stehenden Transportweg

▶ 21 nicht unbedingt eindeutig

im Weiteren beschriebene und genutzte Variante:

Falls es mehrere günstigste Transportwege gibt, so wähle unter diesen einen, über den möglichst viel transportiert werden kann.

▶ 22 Vorteile: Starttableau ist i.A. mit geringeren Gesamtkosten verbunden als dies bei der Nordwestecken-Regel der Fall ist.

Nachteile:
- i.A. größerer algorithmischer Aufwand als bei Nordwestecken-Regel
- Basislösung nicht automatisch mit vollständigem Satz von Basisindizes verbunden

siehe Beispiel ii.)

▶ 48 Wenn dies auftritt, so spricht man von Degeneration

(es sind dann eine oder mehrere Basisvariablen gleich Null)

Algorithmus – Matrixminimumverfahren

▶ 23

0.) Initialisierung:

- $x_{ij} = 0 \;\forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$
- $W = \{ (i,j) \mid i \in \{1,\dots,m\},\, j \in \{1,\dots,n\} \}$ ← zur Wahl stehende Transportwege
- $I = \{ \}$ ← Menge zur Ablage der besuchten Felder

1) geringste Kosten und zugehörenden lohnensten Transportweg & Transportmenge bestimmen

- $\hat{c} = \min \{ c_{ij} \mid (i,j) \in W \}$ ← geringster realisierbarer Kostenkoeffizient
- $Q = \{ (i,j) \in W \mid c_{ij} = \hat{c} \}$ ← zur Wahl stehende Transportwege mit kleinstem Kostenkoeffizient
- $t = \max \{ \min \{ a_i, b_j \} \mid (i,j) \in Q \}$ ← maximal realisierbare Transportmenge zum kleinsten realisierbaren Kostenkoeffizienten
- wähle $(i,j) \in Q$ so, dass $\min \{ a_i, b_j \} = t$ ← verfügbaren Transportweg wählen, der maximal realisierbare Transportmenge bei kleinstem Preis ermöglicht
- $x_{ij} = t$ ← Transportmenge auf gewähltem Weg festlegen
- $I = I \cup \{ (i,j) \}$ ← Koordinaten des besuchten Feldes speichern

2.) Transport durchführen:

- $a_i := a_i - x_{ij}$ ← A_i hat x_{ij} ME weniger
- $b_j := b_j - x_{ij}$ ← B_j braucht x_{ij} ME weniger

3.) Wer braucht noch oder wer kann noch liefern?

- falls $a_i = 0$: ← A_i erschöpft

  $W = W \setminus \{ (i,q) \mid q \in \{1,\dots,n\} \}$ ← kein Transport ab A_i steht mehr zur Wahl

- falls $b_j = 0$: ← B_j zufrieden

  $W = W \setminus \{ (p,j) \mid p \in \{1,\dots,m\} \}$ ← Kein Transport nach B_j mehr möglich

4.) Weitere Transporte nötig?

- falls $W = \{ \}$:
  - mit $I = \{ (i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q) \}$ bestimme
    für $p = 1,\dots,q$:
    $\beta_p := (i_p - 1) \cdot n + j_p$ ← Basisindizes aus Adressen bestimmen
  - $X_B = X$ ← zulässige Basislösung gefunden
  - $\boxed{\text{ENDE}}$

sonst: weiter mit Schritt 1.)

Beispiele:

▶ 24 i) mit $\vec{a} = (32, 39, 27, 2, 61)^T$, $\vec{b} = (34, 38, 28, 31, 30)^T$, $C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 10 & 3 & 10 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 10 & 9 \\ 10 & 10 & 5 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

ist $m = 5$, $n = 5$ (vgl. ii) „Nordwestecke")

Empfänger j

Sender i

	1	2	3	4	5	
1	9	1 · 32	2	2	7	~~32~~ 0
2	10	3 · 6	10	5 · 3	1 · 30	~~39~~ ~~9~~ ~~3~~ 0
3	2 · 27	6	10	10	9	~~27~~ 0
4	10	10	5 · 2	8	10	~~2~~ 0
5	7 · 7	10	9 · 26	10 · 28	7	~~61~~ ~~54~~ ~~28~~ 0
	0 ~~7~~ ~~34~~	0 ~~6~~ ~~38~~	0 ~~26~~ ~~28~~	0 ~~28~~ ~~31~~	0 ~~30~~	

Algorithmus – Matrixminimumverfahren

0.) Initialisierung:

- $x_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$
- $W = \{ (i,j) \mid i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\} \}$ ← zur Wahl stehende Transportwege
- $I = \{\}$ ← Menge zur Ablage der besuchten Felder

1) geringste Kosten und zugehörenden lohnensten Transportweg & Transportmenge bestimmen

- $\hat{c} = \min \{ c_{ij} \mid (i,j) \in W \}$ ← geringster realisierbarer Kostenkoeffizient
- $Q = \{ (i,j) \in W \mid c_{ij} = \hat{c} \}$ ← zur Wahl stehende Transportwege mit kleinstem Kostenkoeffizient
- $t = \max \{ \min \{a_i, b_j\} \mid (i,j) \in Q \}$ ← maximal realisierbare Transportmenge zum kleinsten realisierbaren Kostenkoeffizienten
- wähle $(i,j) \in Q$ so, dass $\min \{a_i, b_j\} = t$ ← verfügbaren Transportweg wählen, der maximal realisierbare Transportmenge bei kleinstem Preis ermöglicht
- $x_{ij} = t$ ← Transportmenge auf gewähltem Weg festlegen
- $I = I \cup \{ (i,j) \}$ ← Koordinaten des besuchten Feldes speichern

2.) Transport durchführen:

- $a_i := a_i - x_{ij}$ ← A_i hat x_{ij} ME weniger
- $b_j := b_j - x_{ij}$ ← B_j braucht x_{ij} ME weniger

3.) Wer braucht noch oder wer kann noch liefern?

- falls $a_i = 0$: ← A_i erschöpft
  $W = W \setminus \{ (i,q) \mid q \in \{1,\dots,n\} \}$ ← kein Transport ab A_i steht mehr zur Wahl
- falls $b_j = 0$: ← B_j zufrieden
  $W = W \setminus \{ (p,j) \mid p \in \{1,\dots,m\} \}$ ← kein Transport nach B_j mehr möglich

4.) Weitere Transporte nötig?

- falls $W = \{\}$:
  - mit $I = \{ (i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q) \}$ bestimme
    für $p = 1,\dots,q$:
    $\beta_p := (i_p - 1) \cdot n + j_p$ ← Basisindizes aus Adressen bestimmen
  - $X_B = X$ ← zulässige Basislösung gefunden
  - $\boxed{\text{ENDE}}$

sonst: weiter mit Schritt 1.)

$I = \{ (1,2), (2,5), (3,1), (2,2), (2,4), (4,3), (5,1), (5,3), (5,4) \}$

1. Iteration: $\hat{c} = 1$, $Q = \{ (1,2), (2,5) \}$, $t = \max \{32, 30\} = 32$, $(i,j) = (1,2)$ ▶ 25

2. Iteration: $\hat{c} = 1$, $Q = \{ (2,5) \}$, $t = \max \{30\} = 30$, $(i,j) = (2,5)$ ▶ 26

3. Iteration: $\hat{c} = 2$, $Q = \{ (3,1) \}$, $t = \max \{27\} = 27$, $(i,j) = (3,1)$ ▶ 27

4. Iteration: $\hat{c} = 3$, $Q = \{ (2,2) \}$, $t = \max \{6\} = 6$, $(i,j) = (2,2)$ ▶ 28

5. Iteration: $\hat{c} = 5$, $Q = \{ (2,4), (4,3) \}$, $t = \max \{3, 2\} = 3$, $(i,j) = (2,4)$ ▶ 29

6. Iteration: $\hat{c} = 5$, $Q = \{ (4,3) \}$, $t = \max \{2\} = 2$, $(i,j) = (4,3)$ ▶ 30

7. Iteration: $\hat{c} = 7$, $Q = \{ (5,1) \}$, $t = \max \{7\} = 7$, $(i,j) = (5,1)$ ▶ 31

8. Iteration: $\hat{c} = 9$, $Q = \{ (5,3) \}$, $t = \max \{26\} = 26$, $(i,j) = (5,3)$ ▶ 32

9. Iteration: $\hat{c} = 10$, $Q = \{ (5,4) \}$, $t = \max \{28\} = 28$, $(i,j) = (5,4)$ ▶ 33

mit $I = \{(1,2), (2,5), (3,1), (2,2), (2,4), (4,3), (5,1), (5,3), (5,4)\}$ ▶ 34

ergeben sich $|I| = 9$ Basisindizes:

$\beta_1 = (1-1)\cdot 5 + 2 = 2$	$\beta_6 = (4-1)\cdot 5 + 3 = 18$
$\beta_2 = (2-1)\cdot 5 + 5 = 10$	$\beta_7 = (5-1)\cdot 5 + 1 = 21$
$\beta_3 = (3-1)\cdot 5 + 1 = 11$	$\beta_8 = (5-1)\cdot 5 + 3 = 23$
$\beta_4 = (2-1)\cdot 5 + 2 = 7$	$\beta_9 = (5-1)\cdot 5 + 4 = 24$
$\beta_5 = (2-1)\cdot 5 + 4 = 9$	

man erhält hier:

- Basislösung
$$X_B = \begin{pmatrix} 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 30 \\ 27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 26 & 28 & 0 \end{pmatrix}$$

- zu den Basisindizes:

$$\mathcal{B} = \{2, 10, 11, 7, 9, 18, 21, 23, 24\} = \{2, 7, 9, 10, 11, 18, 21, 23, 24\}$$

bzw. $I = \{(1,2), (2,5), (3,1), (2,2), (2,4), (4,3), (5,1), (5,3), (5,4)\}$

$= \{(1,2), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (4,3), (5,1), (5,3), (5,4)\}$

- Starttableau für die Optimierungsphase:

Empfänger j

Sender i	1	2	3	4	5	
1	9	1 / 32	2	2	7	32
2	10	3 / 6	10	5 / 3	1 / 30	39
3	2 / 27	6	10	10	9	27
4	10	10	5 / 2	8	10	2
5	7 / 7	10	9 / 26	10 / 28	7	61
	34	38	28	31	30	

mit Transportkosten:

$F(X_B) = 1\cdot 32 + 3\cdot 6 + 5\cdot 3 + 1\cdot 30$
$\quad + 2\cdot 27 + 5\cdot 2 + 7\cdot 7 + 9\cdot 26 + 10\cdot 28$
$\quad = 722$

▶ 35

← günstiger als Start-Transportplan nach Nordwesteckenregel

▶ 36

ii) mit $\vec{a} = (27, 7, 5, 20, 39)^T$, $\vec{b} = (14, 24, 9, 31, 11, 9)^T$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 & 3 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 7 & 6 & 4 \\ 9 & 3 & 10 & 5 & 10 & 6 \\ 10 & 9 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

ist $m = 5, n = 6$ (vgl. i.) „Nordwestecke")

Empfänger j

Sender i	1	2	3	4	5	6	
1	6	2 / 24	9	3 / 3	6	8	~~27~~ ~~3~~ 0
2	7	2	3	7 / 7	6	4	~~7~~ 0
3	9	3	10	5 / 5	10	6	~~5~~ 0
4	10	9	4	4	3 / 11	1 / 9	~~20~~ ~~11~~ 0
5	6 / 14	3	2 / 9	9 / 16	8	1	~~39~~ ~~30~~ ~~16~~ 0
	0 ~~14~~	0 ~~24~~	0 ~~9~~	~~28~~ ~~31~~ ~~23~~ ~~16~~ 0	0 ~~11~~	0 ~~9~~	

$I = \{ (4,6), (1,2), (5,3), (4,5), (1,4), (3,4), (5,1), (2,4), (5,4) \}$

Algorithmus – Matrixminimumverfahren

0.) Initialisierung:

- $x_{ij} = 0 \;\forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$
- $W = \{ (i,j) \mid i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\} \}$ ← zur Wahl stehende Transportwege
- $I = \{ \}$ ← Menge zur Ablage der besuchten Felder

1) geringste Kosten und zugehörenden lohnensten Transportweg & Transportmenge bestimmen

- $\hat{c} = \min \{ c_{ij} \mid (i,j) \in W \}$ ← geringster realisierbarer Kostenkoeffizient
- $Q = \{ (i,j) \in W \mid c_{ij} = \hat{c} \}$ ← zur Wahl stehende Transportwege mit kleinstem Kosten
- $t = \max \{ \min \{ a_i, b_j \} \mid (i,j) \in Q \}$ ← maximal realisierbare Transportmenge zum kleinsten realisierbaren Kostenkoeffizient
- wähle $(i,j) \in Q$ so, dass $\min \{ a_i, b_j \} = t$ ← verfügbaren Transportweg wählen, maximal realisierbare Transportmenge bei kleinstem Preis ermöglicht
- $x_{ij} = t$ ← Transportmenge auf gewähltem Weg festlegen
- $I = I \cup \{ (i,j) \}$ ← Koordinaten des besuchten Feldes speichern

2.) Transport durchführen:

- $a_i := a_i - x_{ij}$ ← A_i hat x_{ij} ME weniger
- $b_j := b_j - x_{ij}$ ← B_j braucht x_{ij} ME weniger

3.) Wer braucht noch oder wer kann noch liefern?

- falls $a_i = 0$: ← A_i erschöpft
  $W = W \setminus \{ (i,q) \mid q \in \{1,\dots,n\} \}$ ← kein Transport ab A_i steht mehr zu
- falls $b_j = 0$: ← B_j zufrieden
  $W = W \setminus \{ (p,j) \mid p \in \{1,\dots,m\} \}$ ← kein Transport nach B_j mehr möglich

4.) Weitere Transporte nötig?

- falls $W = \{ \}$:
  - mit $I = \{ (i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q) \}$ bestimme
    für $p = 1, \dots, q$:
    $\beta_p := (i_p - 1) \cdot n + j_p$ ← Basisindizes aus Adressen bestimmen
  - $X_B = X$ ← zulässige Basislösung gefunden
  - $\boxed{\text{ENDE}}$

sonst: weiter mit Schritt 1.)

1. Iteration: $\hat{c} = 1$, $Q = \{ (4,6), (5,6) \}$, $t = \max \{9, 9\} = 9$, $(i,j) = (4,6)$ (auch (5,6) wäre möglich gewesen, dann anders weiter)

▶ 37

2. Iteration: $\hat{c} = 2$, $Q = \{ (1,2), (2,2), (5,3) \}$, $t = \max \{24, 7, 9\} = 24$, $(i,j) = (1,2)$ ▶ 38

3. Iteration: $\hat{c} = 2$, $Q = \{ (5,3) \}$, $t = \max \{9\} = 9$, $(i,j) = (5,3)$ ▶ 39

4. Iteration: $\hat{c} = 3$, $Q = \{ (1,4), (4,5) \}$, $t = \max \{3, 11\} = 11$, $(i,j) = (4,5)$ ▶ 40

5. Iteration: $\hat{c} = 3$, $Q = \{ (1,4) \}$, $t = \max \{3\} = 3$, $(i,j) = (1,4)$ ▶ 41

6. Iteration: $\hat{c} = 5$, $Q = \{ (3,4) \}$, $t = \max \{5\} = 5$, $(i,j) = (3,4)$ ▶ 42

7. Iteration: $\hat{c} = 6$, $Q = \{ (5,1) \}$, $t = \max \{14\} = 14$, $(i,j) = (5,1)$ ▶ 43

8. Iteration: $\hat{c} = 7$, $Q = \{ (2,4) \}$, $t = \max \{7\} = 7$, $(i,j) = (2,4)$ ▶ 44

9. Iteration: $\hat{c} = 9$, $Q = \{ (5,4) \}$, $t = \max \{16\} = 16$, $(i,j) = (5,4)$ ▶ 45

mit $I = \{(4,6), (1,2), (5,3), (4,5), (1,4), (3,4), (5,1), (2,4), (5,4)\}$ ▶ 46

ergeben sich $|I| = 9$ Basisindizes:

$$\beta_1 = (4-1)\cdot 6 + 6 = 24 \qquad \beta_6 = (3-1)\cdot 6 + 4 = 16$$
$$\beta_2 = (1-1)\cdot 6 + 2 = 2 \qquad \beta_7 = (5-1)\cdot 6 + 1 = 25$$
$$\beta_3 = (5-1)\cdot 6 + 3 = 27 \qquad \beta_8 = (2-1)\cdot 6 + 4 = 10$$
$$\beta_4 = (4-1)\cdot 6 + 5 = 23 \qquad \beta_9 = (5-1)\cdot 6 + 4 = 28$$
$$\beta_5 = (1-1)\cdot 6 + 4 = 4$$

man erhält hier:

- Basislösung: $$x_B^* = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 9 \\ 14 & 0 & 9 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- zu den Basisindizes:

$$\mathcal{B} = \{24, 2, 27, 23, 4, 16, 25, 10, 28\} = \{2, 4, 10, 16, 23, 24, 25, 27, 28\}$$

bzw. $I = \{(4,6), (1,2), (5,3), (4,5), (1,4), (3,4), (5,1), (2,4), (5,4)\}$
$= \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,3), (5,4)\}$

- Starttableau für die Optimierungsphase

Empfänger j

Sender i	1	2	3	4	5	6	
1	6	2 24	9	3 3	6	8	27
2	7	2	3	7 7	6	4	7
3	9	3	10	5 5	10	6	5
4	10	9	4	4	3 11	1 9	20
5	6 14	3	2 9	9 16	8	1	39
	14	24	9	31	11	9	

mit Transportkosten:
$F = 2\cdot 24 + 3\cdot 3 + 7\cdot 7 + 5\cdot 5$
$+ 3\cdot 11 + 1\cdot 9 + 6\cdot 14 + 2\cdot 9 + 9\cdot 16$
$= 419$ ▶ 47

← günstiger als Start-Transportplan nach Nordwesteckenregel

Problem: Es sind hier nur 9 Basisindizes, statt der erforderlichen 10 Basisindizes definiert.
D.h. es muss ein Index β_{10} (bzw. ein Paar (i_{10}, j_{10})) gefunden werden, so dass die Spalten $\beta_1, \dots, \beta_{10}$ von $A \in \mathbb{R}^{11\times 30}$ l.u.a. sind.

▶ 48

Beispielhafte Betrachtung (mit Matlab-Unterstützung) ▶ 49

$$A = \left(\begin{array}{cccccc:cccccc:cccccc:cccccc:cccccc}
1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1\\
\hdashline
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right)$$

▶ 50

Empfänger j

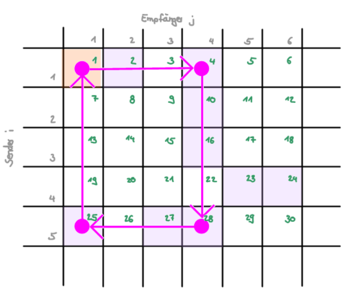
Sender i	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	19	20	21	22	23	24
5	25	26	27	28	29	30

Basisindizes $\beta_1, \dots, \beta_9$ als Indexpaare $(i_1, j_1), \dots, (i_9, j_9)$ dargestellt.

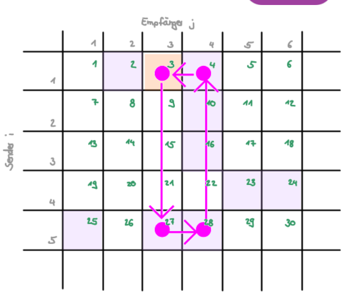
▶ 57 im Video: Strukturelle Betrachtungen (was es mit den Zyklen auf sich hat)

nicht zielführende Wahl von β_{10}: (da Spalten $\beta_1, \dots, \beta_9, \beta_{10}$ nicht l.u.a.)

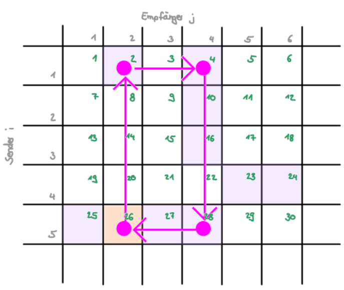
$\beta_{10} = 1$ ▶ 51



$\beta_{10} = 3$ ▶ 52



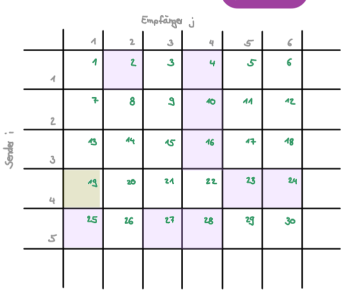
$\beta_{10} = 26$ ▶ 55



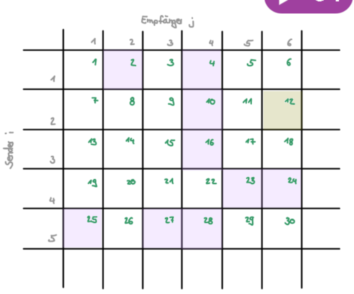
zyklisches Springen auf markierten Feldern horizontal & vertikal

Zielführende Wahl von β_{10} (da Spalten $\beta_1, \dots, \beta_9, \beta_{10}$ l.u.a.)

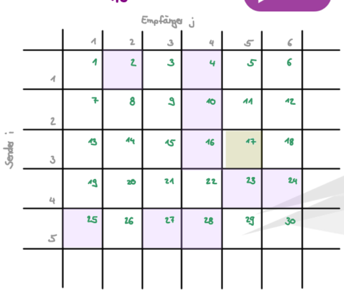
$\beta_{10} = 19$ ▶ 53



$\beta_{10} = 12$ ▶ 54



$\beta_{10} = 17$ ▶ 56



kein zyklisches Springen möglich

Strategie zur Bestimmung fehlender Basisindizes $\tilde{\beta}$ bzw. $(\tilde{i}, \tilde{j})$ bei Degeneration ▶ 58

Wähle $\tilde{\beta}$ bzw. $(\tilde{i}, \tilde{j})$ (mit $\tilde{\beta} = (\tilde{i}-1) \cdot n + \tilde{j}$) so, dass dadurch keine Zyklen in den markierten Feldern entstehen.

▶ 59 im Video: zusätzliche Beispiele

?
- theoretischer Hintergrund: warum?
- Begrifflichkeiten: „Zyklus" ?

← nicht hier ▶ 60