Grafische Interpretation linearer Optimierungsprobleme

- nur möglich für $n = 2$ und $n = 3$ (bzgl. Standardform)
- es gibt nicht nur Problemstellungen, die man sich vorstellen kann!
  (tatsächlich ist $n \geq 4$ gebräuchlich)
- grafische Lösung ist, auch wenn möglich, nicht empfehlenswert

Hinweis: 3D-Darstellungen basieren z.T. auf den „bensolve tools" (für Matlab / Octave)

siehe: http://tools.bensolve.org/

Theoretischer Background:

A. Löhne and B. Weißing.
The vector linear program solver Bensolve – notes on theoretical background.
European Journal of Operational Research, 2016.
DOI: 10.1016/j.ejor.2016.02.039, see also http://arxiv.org/abs/1510.04823.

Ausgangspunkt: LP in Standardform

$$(S_n): \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN. } \quad A\vec{x} \leq \vec{b} \\ \qquad\quad \vec{x} \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^m,\ \vec{c} \in \mathbb{R}^n$$

mit $n = 2$ oder $n = 3$

in gleichungsbasierter Notation:

für $n = 2$:

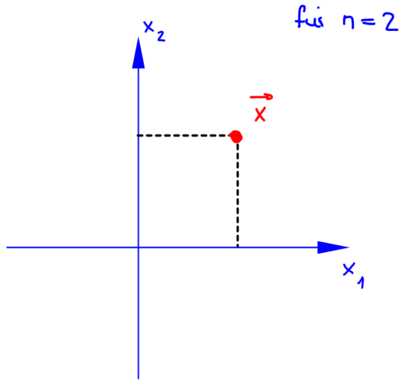
$$(S_2) \begin{cases} \text{maximiere } F(x_1, x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 x_2 \\ \text{udN. } \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad a_{m_1} x_1 + a_{m_2} x_2 \leq b_m \\ \qquad\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

für $n = 3$:

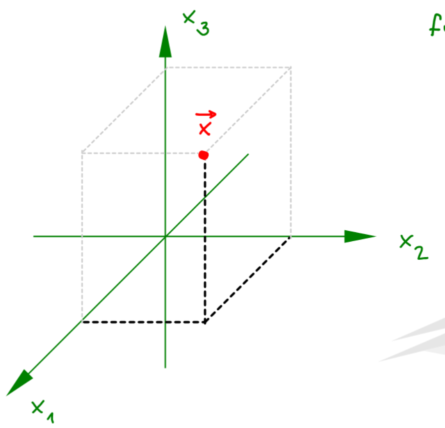
$$(S_3) \begin{cases} \text{maximiere } F(x_1, x_2, x_3) = c_1 \cdot x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \text{udN. } \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad a_{m_1} x_1 + a_{m_2} x_2 + a_{m3} x_3 \leq b_m \\ \qquad\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

① Interpretation der Entscheidung $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ als Punkt in kartesischem Koordinatensystem

für $n = 2$



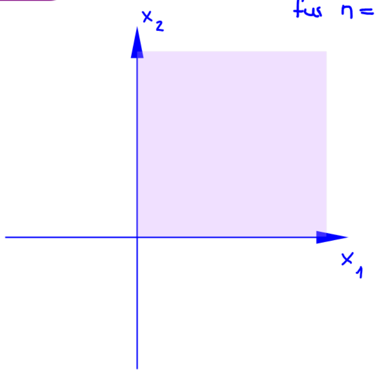
für $n = 3$



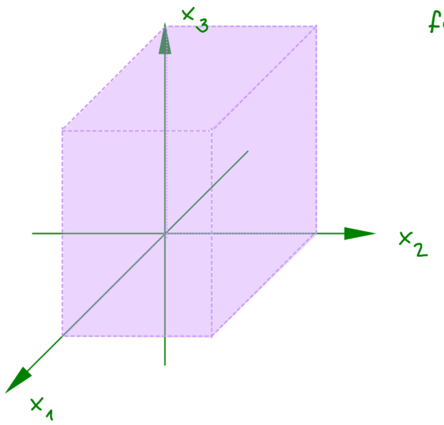
② Interpretation der Nichtnegativitätsbedingungen: Einschränkung auf einen Quadranten bzw. Oktanten

▶ 4

für $n=2$



für $n=3$



③ Interpretation der Nebenbedingungen ▶ 5

- für $n=2$: ▶ 6

jede einzelne NB $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2}\, x_2 \leq b_i$ erzeugt eine Zerlegung des $\mathbb{R}^2$

in zwei Halbebenen: $H_i^+,\ H_i^- \quad (i = 1,..,m)$

mit: $H_i^- := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \right\}$ ← Menge der Punkte, die die NB i erfüllen

$H_i^+ := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 > b_i \right\}$ ← Menge der Punkte, die die NB i nicht erfüllen

gilt: $\mathbb{R}^2 = H_i^- \cup H_i^+$ und $H_i^- \cap H_i^+ = \emptyset$

▶ 7 Die Menge $G_i := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i \right\}$ stellt die Abgrenzung von H_i^- zu H_i^+ dar.

Es ist:
- $G_i \subset H_i^-$
- $G_i \mathrel{\hat=}$ Menge der Punkte, die die Einschränkung voll ausschöpfen
- $G_i \mathrel{\hat=}$ Gerade in $\mathbb{R}^2$ (d.h. für $\vec{x}, \vec{y} \in G_i$ gilt: $\lambda \cdot \vec{x} + (1-\lambda) \cdot \vec{y} \in G_i \;\; \forall \lambda \in [0,1]$)

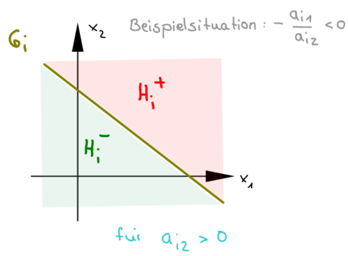
▶ 8 Fall 1: $a_{i2} \neq 0$ dann:

$$\binom{x_1}{x_2} \in G_i \Leftrightarrow a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_2 = -\frac{a_{i1}}{a_{i2}} x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}}$$

Gerade mit Steigung $-\frac{a_{i1}}{a_{i2}}$

& x_2-Achsenabschnitt $\frac{b_i}{a_{i2}}$



▶ 9 ? wo liegen H_i^- & H_i^+ relativ zu G_i in der grafischen Darstellung:

$$\binom{x_1}{x_2} \in H_i^- \Leftrightarrow a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i$$

$$\Leftrightarrow a_{i2}\, x_2 \leq -a_{i1}\, x_1 + b_i$$

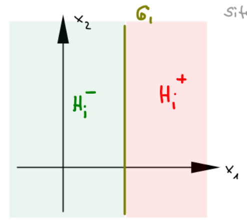
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \leq -\frac{a_{i1}}{a_{i2}} x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}} & \text{falls } a_{i2} > 0 \\ x_2 \geq -\frac{a_{i1}}{a_{i2}} x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}} & \text{falls } a_{i2} < 0 \end{cases}$$

▶ 10

Fall 2: $a_{i2} = 0$ dann:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in G_i \Leftrightarrow a_{i1} x_1 = b_i \Longleftrightarrow \underbrace{x_1 = \frac{b_i}{a_{i1}}}$$

Parallele zur x_2-Achse durch $\left(\frac{b_i}{a_{i1}} \,\middle|\, 0 \right)$



Situation: $\frac{b_i}{a_{i1}} > 0$

und $a_{i1} > 0$

▶ 11

? Wo liegen H_i^- & H_i^+ relativ zu G_i in der grafischen Darstellung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in H_i^- \Longleftrightarrow a_{i1} x_1 \le b_i$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \le \dfrac{b_i}{a_{i1}} & \text{falls } a_{i1} > 0 \\[2ex] x_1 \ge \dfrac{b_i}{a_{i1}} & \text{falls } a_{i1} < 0 \end{cases}$$

- für $n = 3$ ▶ 12

jede einzelne NB $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} \cdot x_3 \le b_i$ erzeugt eine Zerlegung des $\mathbb{R}^3$

in zwei Halbräume H_i^+, H_i^- $(i = 1, \dots, m)$

mit: $H_i^- := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \le b_i \right\}$ ← Menge der Punkte, die die NB i erfüllen

$H_i^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 > b_i \right\}$ ← Menge der Punkte, die die NB i nicht erfüllen

gilt: $\mathbb{R}^3 = H_i^- \cup H_i^+$ und $H_i^- \cap H_i^+ = \emptyset$

▶ 13 Die Menge $G_i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 = b_i \right\}$

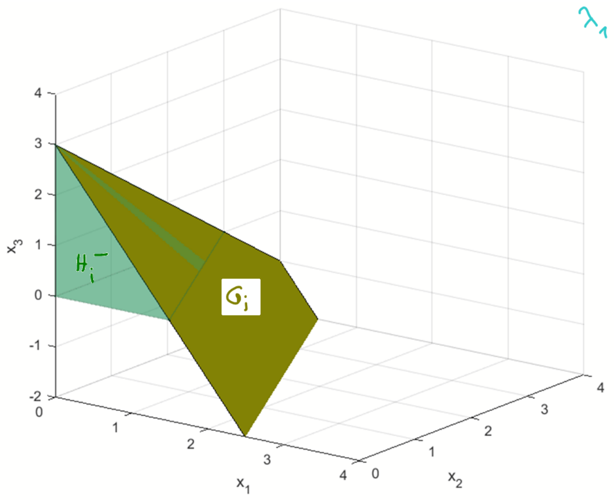
stellt die Abgrenzung von H_i^- zu H_i^+ dar.

Es ist:
- $G_i \subset H_i^-$
- $G_i \mathrel{\hat{=}}$ Menge der Punkte, die die Einschränkung voll ausschöpfen
- $G_i \mathrel{\hat{=}}$ Ebene im $\mathbb{R}^3$ (d.h. für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in G_i$ gilt:

$\lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y} + \lambda_3 \vec{z} \in G_i$

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$)

▶ 14



Beispiel: G_i und H_i^- zur NB:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 3$$

④ Darstellung der Menge der zulässigen Lösung ▶ 15

- für $n = 2$: ▶ 16

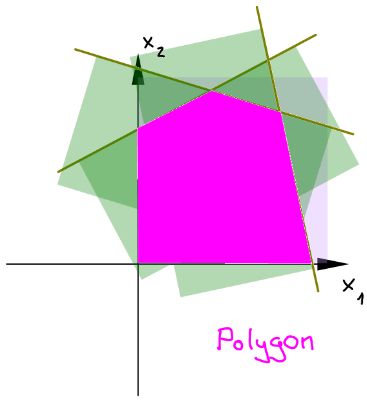
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ ist zulässige Lösung } \Leftrightarrow A\vec{x} \le \vec{b} \;\wedge\; \vec{x} \ge \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1) \wedge \dots \wedge (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m) \wedge (x_1 \ge 0) \wedge (x_2 \ge 0)$$

$$\Leftrightarrow (\vec{x} \in H_1^-) \wedge \dots \wedge (\vec{x} \in H_m^-) \wedge (\vec{x} \ge \vec{0})$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} \in (H_1^- \cap \dots \cap H_m^- \cap \{\vec{y} \mid \vec{y} \ge \vec{0}\})$$

grafische Darstellung : Menge der zulässigen Lösungen als Schnittfläche von Halbebenen ▶ 17



Beispiel für 3 NBen
& Nichtnegativitätsforderungen

- für $n = 3$ ▶ 18

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ ist zulässige Lösung } \Leftrightarrow A\vec{x} \le \vec{b} \;\wedge\; \vec{x} \ge \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1) \wedge \dots \wedge (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \le b_m) \wedge (x_1 \ge 0) \wedge (x_2 \ge 0) \wedge (x_3 \ge 0)$$

$$\Leftrightarrow (\vec{x} \in H_1^-) \wedge \dots \wedge (\vec{x} \in H_m^-) \wedge (\vec{x} \ge \vec{0})$$

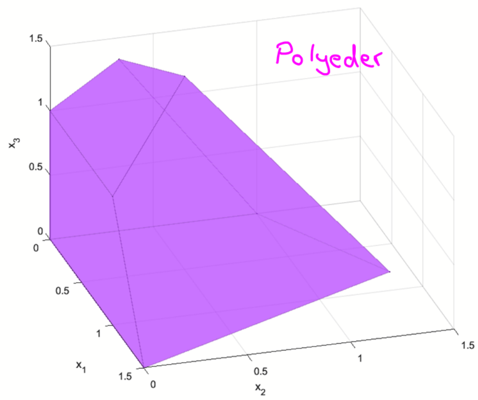
$$\Leftrightarrow \vec{x} \in (H_1^- \cap \dots \cap H_m^- \cap \{\vec{y} \mid \vec{y} \ge \vec{0}\})$$

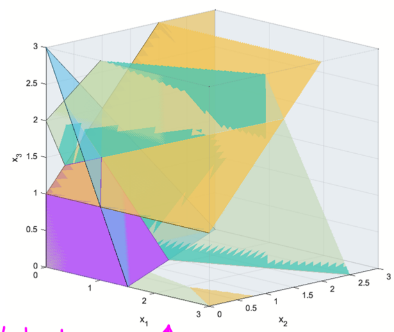
grafische Darstellung : Menge der zulässigen Lösungen als Schnittraum von Halbräumen ▶ 19

am Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \ge \vec{0} \quad \rightarrow$$





entstanden aus ↗

▶ 20 im Video: Vergleich von Polygon & Polyeder

Beispiele für $n = 2$:

i)

▶ 21

$$(LP_1)\quad \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \qquad \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

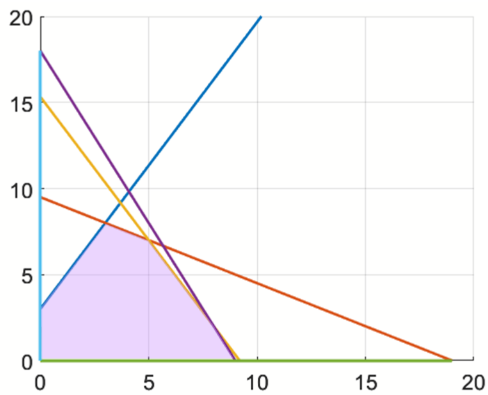
Begrenzungsgeraden

NB 1: $-5x_1 + 3x_2 \le 9$ $\rightsquigarrow$ g_1: $x_2 = \frac{5}{3}x_1 + 3$

NB 2: $x_1 + 2x_2 \le 19$ $\rightsquigarrow$ g_2: $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{19}{2}$

NB 3: $5x_1 + 3x_2 \le 46$ $\rightsquigarrow$ g_3: $x_2 = -\frac{5}{3}x_1 + \frac{46}{3}$

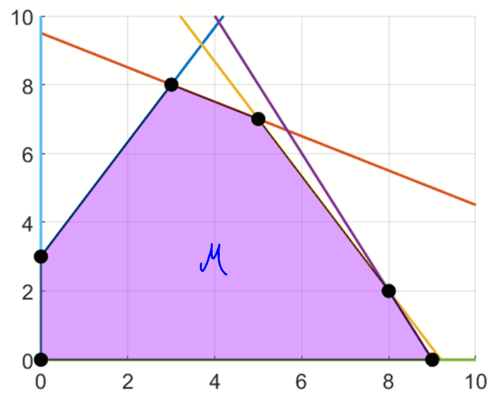
NB 4: $2x_1 + x_2 \le 18$ $\rightsquigarrow$ g_4: $x_2 = -2x_1 + 18$



$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

Vergrößerte Ansicht:



mit Eckpunkten (jeweils Schnittpunkte von mindestens zwei Geraden)

$(0|0)$, $(0|3)$, $(3|8)$, $(5|7)$, $(8|2)$, $(9|0)$

ii)

▶ 22

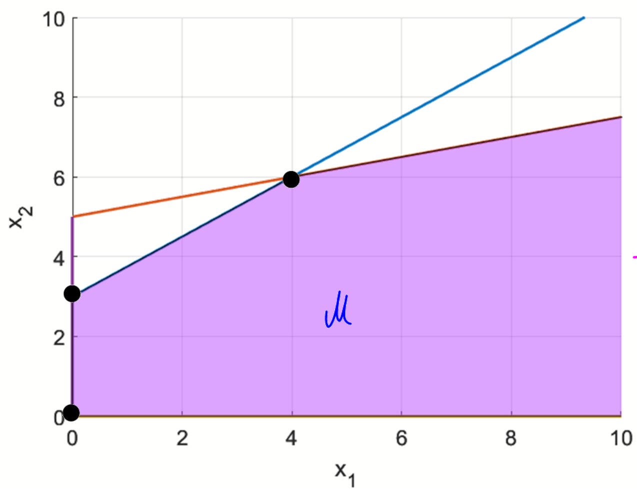
$$(LP_2)\quad \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} \\ \qquad \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

NB 1: $-3x_1 + 4x_2 \le 12$

$\rightsquigarrow$ g_1: $x_2 = \frac{3}{4}x_1 + 3$

NB 2: $-x_1 + 4x_2 \le 20$

$\rightsquigarrow$ g_2: $x_2 = \frac{1}{4}x_1 + 5$



Eckpunkte: $(0|0)$, $(0|3)$, $(4,6)$

→ Gebiet ist nicht beschränkt!

iii) ▶ 23

$$(LP_3)\quad \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN. } \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 45 \end{pmatrix} \\ \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

NB 1: $-3x_1 + 5x_2 \leq 20$

$\rightsquigarrow g_1: \boxed{x_2 = \frac{3}{5}x_1 + 4}$

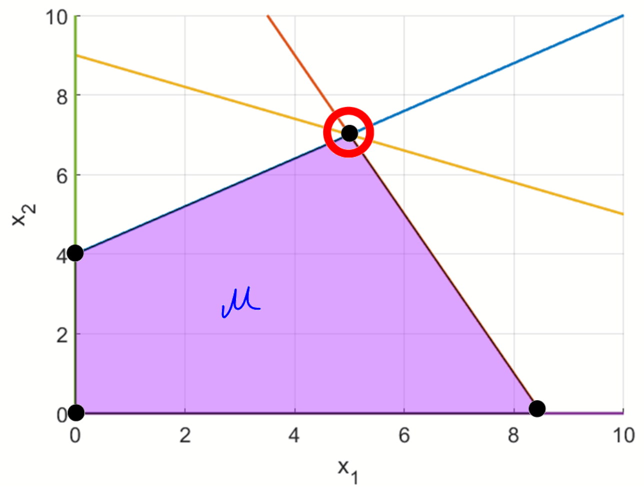
NB 2: $2x_1 + x_2 \leq 17$

$\rightsquigarrow g_2: \boxed{x_2 = -2x_1 + 17}$

NB 3: $2x_1 + 5x_2 \leq 45$

$\rightsquigarrow g_3: \boxed{x_2 = -\frac{2}{5}x_1 + 9}$

Stellt keine echte weitere Einschränkung dar (bestimmend sind hier NB 1 & 2)



Eckpunkte: $(0|0)$, $(0|4)$, $(5|7)$, $(\frac{17}{2}|0)$

Schnittpunkt von drei Begrenzungsgeraden

⑤ Interpretation der Zielfunktion ohne Nebenbedingungen & Nichtnegativitätsbedingungen: ▶ 24

- für $n = 2$ ▶ 25

mit $F(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ gilt

Voraussetzung: $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstant und $((c_1 \neq 0) \vee (c_2 \neq 0))$

▶ 26 i) jeder beliebige Zielfunktionswert wird angenommen, d.h.

$$\forall z \in \mathbb{R} \;\; \exists \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = c_1 \cdot \tilde{x}_1 + c_2 \cdot \tilde{x}_2 = z$$

(Konsequenz: ohne NBen ist F unbeschränkt!)

▶ 27 ii) alle Entscheidungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit gleichem Zielfunktionswert z bilden eine Gerade im $\mathbb{R}^2$:

für $z \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{F}_z := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid F(x_1, x_2) = z \right\}$

dann ist: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_z \Leftrightarrow F(x_1, x_2) = z$

$$\Leftrightarrow c_1 x_1 + c_2 x_2 = z$$

Gerade mit Steigung $-\frac{c_1}{c_2}$ und x_2-Achsenabschnitt $\frac{z}{c_2}$

▶ 28

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Falls } c_2 \neq 0: & \boxed{x_2 = -\frac{c_1}{c_2} \cdot x_1 + \frac{z}{c_2}} \\ \text{Falls } c_2 = 0: & \boxed{x_1 = \frac{z}{c_1}} \end{cases}$$

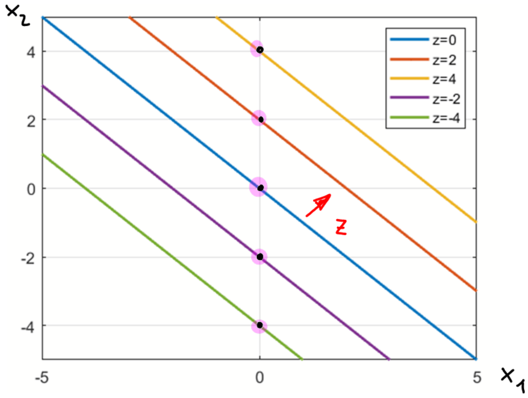
unabhängig von z!

Parallele zur x_2-Achse durch $(\frac{z}{c_1}|0)$

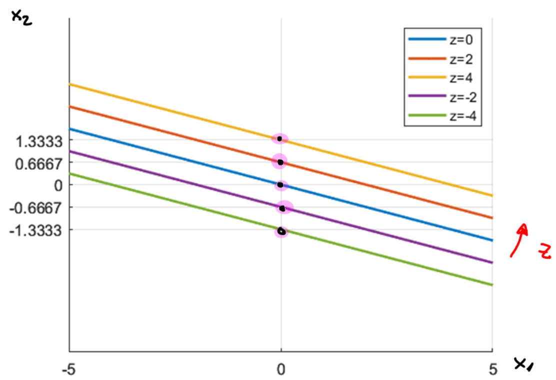
Für unterschiedliche z-Werte sind die jeweiligen Geraden parallel: für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{F}_{z_1} \parallel \mathcal{F}_{z_2}$

Beispiele: (nur Zielfunktionen)

▶ 29 i) für $\vec{c} = \binom{1}{1}$, d.h. $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ist $\mathcal{F}_z = \{ \binom{x_1}{x_2} \mid x_2 = -x_1 + z \}$

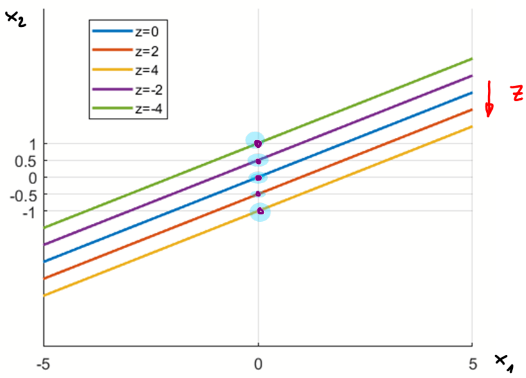


▶ 30 ii) für $\vec{c} = \binom{1}{3}$, d.h. $F(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$ ist $\mathcal{F}_z = \{ \binom{x_1}{x_2} \mid x_2 = -\frac{1}{3} x_1 + \frac{z}{3} \}$

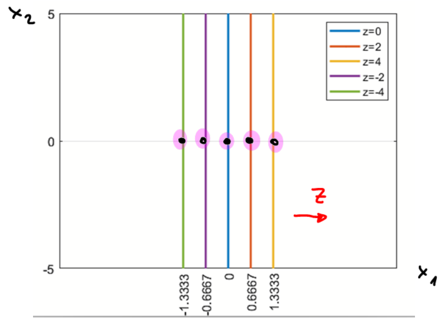


▶ 31 iii) für $\vec{c} = \binom{2}{-4}$, d.h. $F(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2$ ist $\mathcal{F}_z = \{ \binom{x_1}{x_2} \mid x_2 = \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{z}{4} \}$

$\uparrow$
$-\frac{c_1}{c_2} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$



▶ 32 iv) für $\vec{c} = \binom{3}{0}$, d.h. $F(x_1, x_2) = 3x_1$ ist $\mathcal{F}_z = \{ \binom{x_1}{x_2} \mid x_1 = \frac{z}{3} \}$



• für $n=3$ ▶ 33

mit $F(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$ gilt

Voraussetzung: $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ konstant und $((c_1 \neq 0) \vee (c_2 \neq 0) \vee (c_3 \neq 0))$

i) jeder beliebige Zielfunktionswert wird angenommen, d.h.

$$\forall z \in \mathbb{R} \; \exists \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2 + c_3 \cdot \tilde{x}_3 = z$$

▶ 34

(Konsequenz: ohne NBen ist F unbeschränkt!)

ii) alle Entscheidungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit gleichem Zielfunktionswert z bilden eine Ebene in $\mathbb{R}^3$

für $z \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{F}_z := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; F(x_1, x_2, x_3) = z \right\}$ ▶ 35

dann ist: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_z \Leftrightarrow F(x_1, x_2, x_3) = z$

$$\Leftrightarrow \boxed{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = z}$$

Koordinatenform einer Ebene mit

• Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ ← unabhängig von z

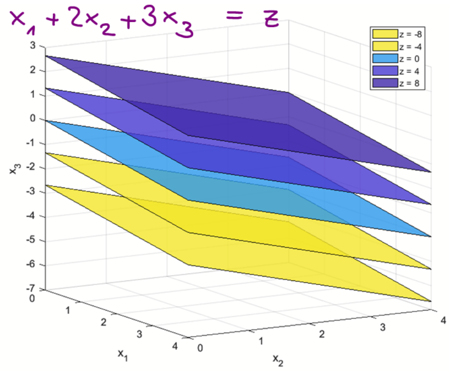
• Absolutterm z

Für unterschiedliche z-Werte ergeben sich parallele Ebenen

▶ 36

Beispiele (nur Zielfunktionen)

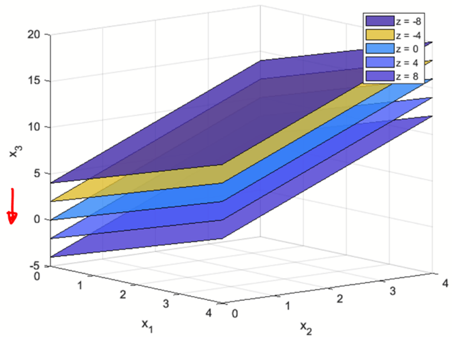
i) $\vec{c} = (1, 2, 3)^T$: Ebenen der Form $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = z$ ▶ 37



↑ z

ii) $\vec{c} = (3, 5, -2)^T$: Ebenen der Form $3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = z$

z ↓



▶ 38

6. Graphische Maximierung der Zielfunktion (mit NBen & Nichtnegativitätsforderungen)

▶ 39

Aufgabenstellung:
$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN.} & A\vec{x} \le \vec{b} \\ & \vec{x} \ge 0 \end{cases}$$

gesucht sind also:

- $F_{max} := \max\limits_{\vec{x}\in\mathcal{M}} F(\vec{x})$ ← Maximum der realisierbaren Zielfunktionswerte

▶ 40

- $X_{opt} = \{\, \vec{x}_{opt} \in \mathcal{M} \mid F(\vec{x}_{opt}) = F_{max} \,\}$ ← Menge der zulässigen Lösungen, die F_{max} realisieren = Menge der optimalen Lösungen

Hilfsüberlegung:

$z \in \mathbb{R}$ ist realisierbarer Funktionswert

▶ 41

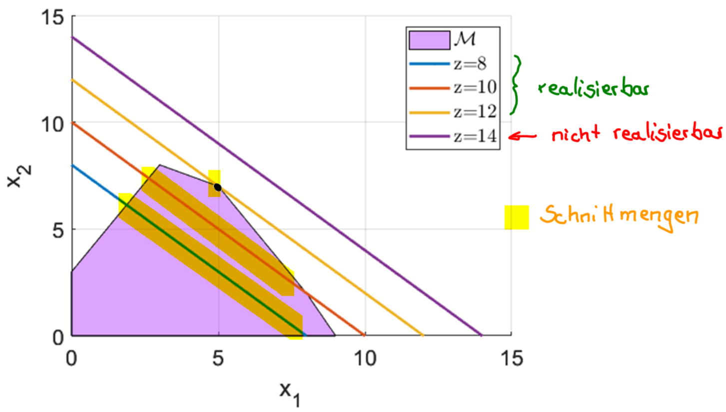
$$\Leftrightarrow \exists\, \vec{x} \in \mathcal{M} : F(\vec{x}) = z$$
$$\Leftrightarrow \exists\, \vec{x} \in \mathcal{M} : \vec{x} \in \mathcal{F}_z$$
$$\Leftrightarrow \exists\, \vec{x} \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{F}_z)$$
$$\Leftrightarrow (\mathcal{M} \cap \mathcal{F}_z) \ne \{\}$$

↑ bietet graphische Darstellungsform

Beispiele

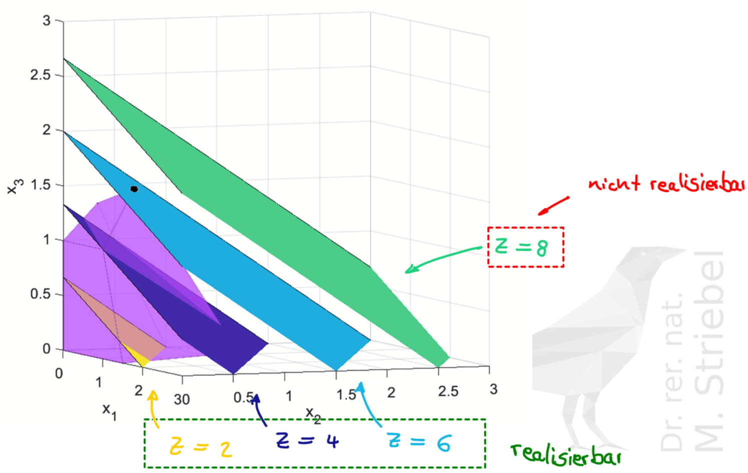
▶ 42 i) für $n = 2$:

$$(LP_1)\begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^T \vec{x} \\ \text{u.d.N.} & \begin{pmatrix}-5 & 3\\ 1 & 2\\ 5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\vec{x} \le \begin{pmatrix}9\\19\\46\\18\end{pmatrix} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$



▶ 43 ii) für $n = 3$:

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}^T \cdot \vec{x} \\ \text{udN.} & \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\vec{x} \le \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$



somit ist

- $F_{max} = \max\{ z \in \mathbb{R} \mid (\mathcal{M} \cap \mathcal{F}_z) \neq \{\} \}$
- $X_{opt} = \mathcal{M} \cap \mathcal{F}_{F_{max}}$

▶ 44

Zeichnerische Lösungen sind nur möglich für den Fall $n = 2$.
Empfehlenswert ist das Vorgehen allerdings nicht!

Schritte der zeichnerischen Lösung:

▶ 45

1.) graphische Darstellung der Menge $\mathcal{M}$ der zulässigen Lösungen

2.) Einzeichnen der Geraden $\mathcal{F}_0$

3.) Parallelverschiebung der Geraden $\mathcal{F}_0$ in Richtung wachsender Werte z bis gerade noch eine Schnittmenge mit $\mathcal{M}$ gegeben ist

4.) Abhängig von c_2:

- falls $c_2 \neq 0$: Ablesen des x_2-Achsenabschnittes.
  Ist dieser λ, so ergibt sich $F_{max} = c_2 \cdot \lambda$
- falls $c_2 = 0$: Ablesen des x_1-Achsenabschnittes
  Ist dieser λ, so ergibt sich $F_{max} = c_1 \cdot \lambda$

5.) X_{opt} = „finale Schnittmenge"

es kann vorkommen, dass:

- sich die $\mathcal{F}_z$-Gerade beliebig weit verschieben lässt
  dann ist $F(\vec{x})$ unbeschränkt & das Problem nicht lösbar
- sich X_{opt} als Geradenstück ergibt
  dann ist die optimale Lösung nicht eindeutig

Beispiele

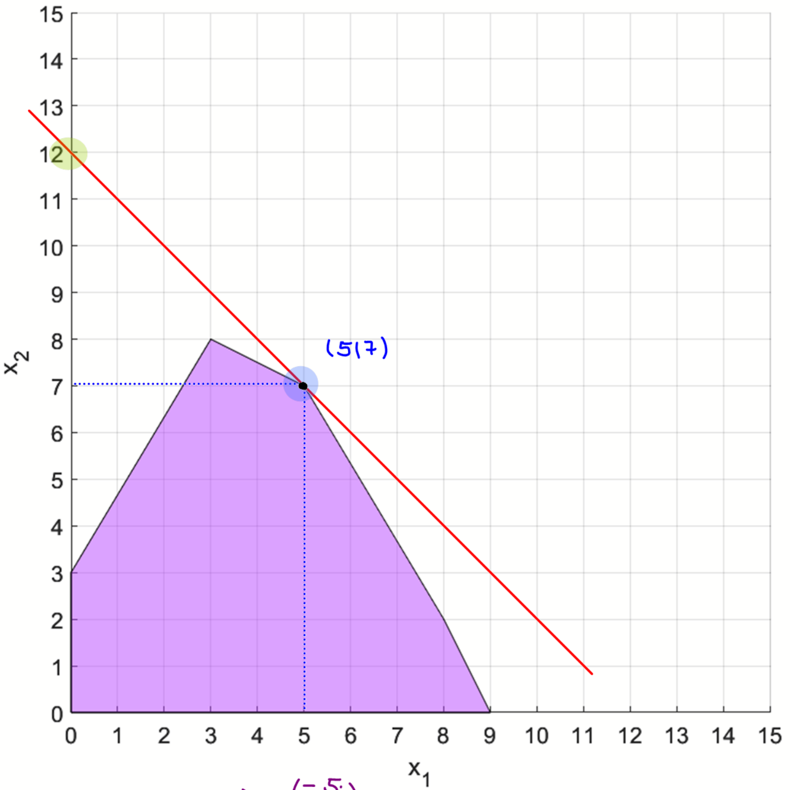
a) basierend auf

$$(LP_1)\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} \leq \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

▶ 46

i) zeichnerische Lösung für $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

▶ 47



ΓNR:

zu 2.) $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1$

zu 4.) x_2-Achsenabschnitt: $\lambda = 12$

$F_{max} = 1 \cdot 12 = \underline{\underline{12}}$

zu 5.) $X_{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ $\lrcorner$

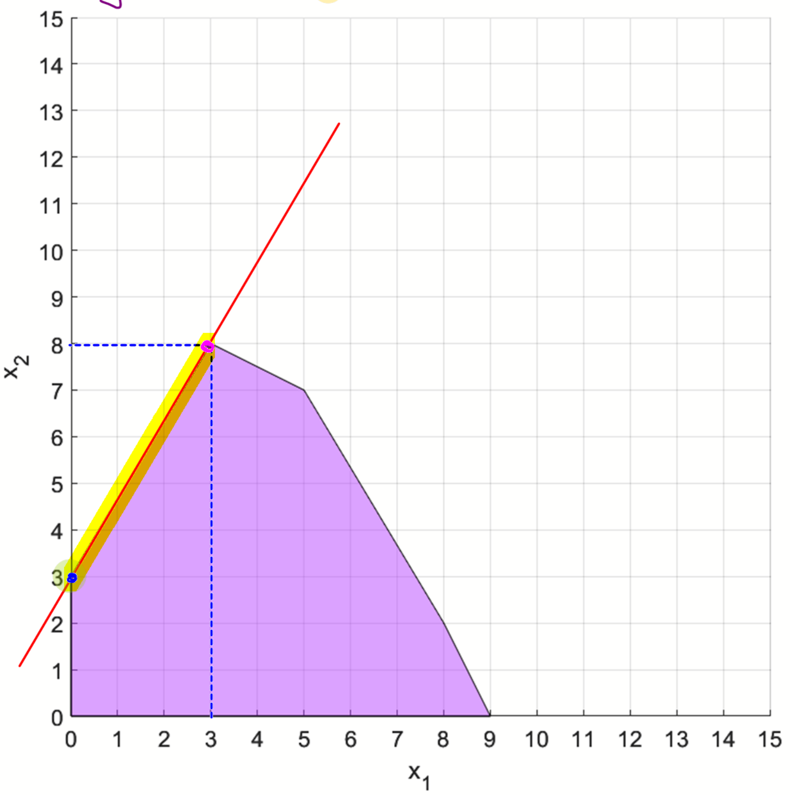
Ergebnis:

$F_{max} = 12$

$X_{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

ii) zeichnerische Lösung für $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

▶ 48



ΓNR:

zu 2.) $-5x_1 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{3}x_1$

zu 4.) $\lambda = 3 \Rightarrow F_{max} = 3 \cdot 3 = \underline{\underline{9}}$

zu 5.) X_{opt} $\hat{=}$ Geradenstück zwischen $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\lrcorner$

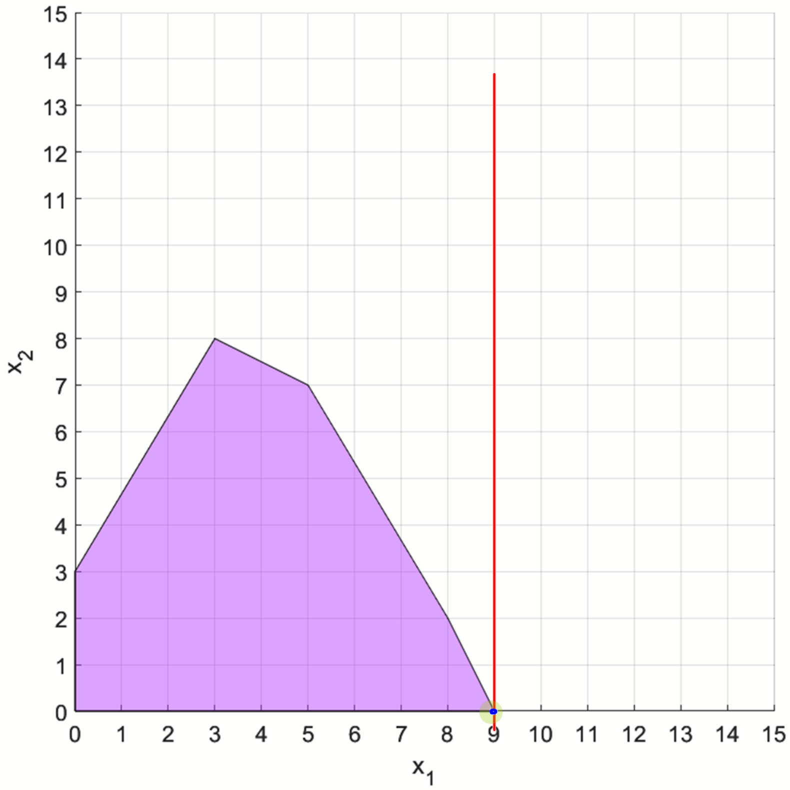
Ergebnis:

$F_{max} = 9$

$X_{opt} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \mid \lambda \in [0,1] \right\}$

▶ 49

iii) zeichnerische Lösung für $\vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$



TNR:

zu 2.) $11 \cdot x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

zu 4.) x_1-Achsenabschnitt: $\lambda = 9$

$\Rightarrow F_{max} = 11 \cdot 9 = \underline{\underline{99}}$

zu 5.) $X_{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ergebnis:

- $F_{max} = 99$
- $X_{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

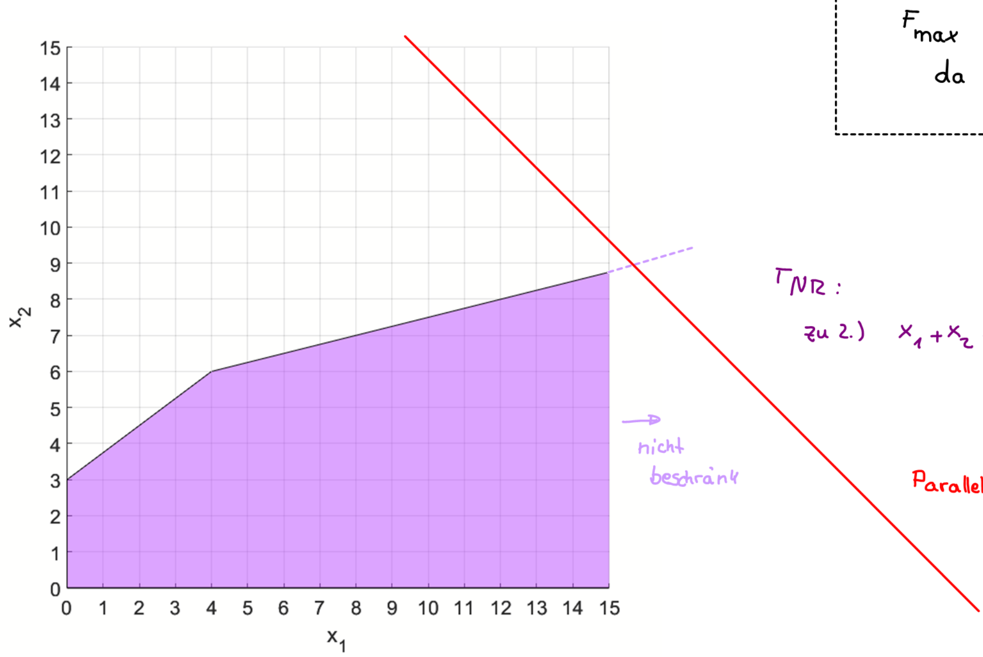
b)

$$(LP_2) \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \vec{x} \\ \text{udN.} & \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

▶ 50

Ergebnis:

F_{max} existiert nicht, da $F(\vec{x})$ unbeschränkt.



TNR:

zu 2.) $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1$

Parallelverschiebung ohne Beschränkung möglich!

Fazit:

Für $n=2$ Strukturvariablen kann man LPe auch zeichnerisch lösen.

▶ 51

Dies ist allerdings nicht empfehlenswert, denn es gibt folgende Problematiken:

- Unsicherheit / Ungewissheit beim Ablesen der Werte
- $\mathcal{M}$ zeichnerisch kompliziert für viele NBen

Allgemein (d.h. für $n \in \mathbb{N}$) gilt:

- Die Menge $\mathcal{M}$ der zulässigen Lösungen ist eine konvexe Menge, genauer ein konvexes Polytop (Gebilde im $\mathbb{R}^n$ das durch Hyperebenen begrenzt ist)
- Die optimale Lösung ist, wenn sie eindeutig ist, immer eine Ecke von $\mathcal{M}$ und falls sie nicht eindeutig ist, so ist sie die Menge der echten Konvexkombinationen von Ecken von $\mathcal{M}$