Struktur linearer Optimierungsprobleme

▶ 1

Ausgangspunkt: Lineares Programm in Standardform ▶ 2

$$(LP_S)\quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & A\vec{x} \le \vec{b} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^n$

$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$

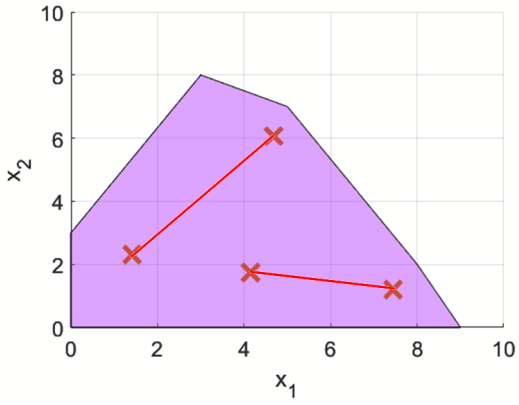
1.) Die Menge $\mathcal{M} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} \le \vec{b} \wedge \vec{x} \ge \vec{0} \in \mathbb{R}^n \}$ der zulässigen Lösungen ist konvex ▶ 3

▶ 4 „$\mathcal{M}$ ist konvex" bedeutet:

- formal: $\forall\, \vec{y}, \vec{w} \in \mathcal{M}$ gilt: $\lambda\vec{y} + (1-\lambda)\cdot\vec{w} \in \mathcal{M} \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$

  Konvexkombination von $\vec{y}, \vec{w}$

- anschaulich: für je zwei Elemente von $\mathcal{M}$ sind auch alle Punkte auf einer gedachten Verbindungsstrecke dieser beiden Elemente selbst auch Elemente von $\mathcal{M}$



Menge der zulässigen Lösungen für

$$(LP_1)\quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} \le \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

2.) $\mathcal{M}$ ist der Durchschnitt von $n+m$ Halbräumen. ▶ 5 ▶ 6 im Video: Anschauung

▶ 7 genauer: mit $H_k^- = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, x_i \le b_k \}$ ← Menge der Punkte des $\mathbb{R}^n$ die die k-te NB erfüllen

für $k = 1, \dots, m$

und $P_\ell = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_\ell \ge 0 \}$ ← Menge der Punkte, für die die ℓ-te Komponente nicht negativ ist

für $\ell = 1, \dots, n$

ist $\mathcal{M} = \left(\bigcap_{k=1}^{m} H_k^- \right) \cap \left(\bigcap_{\ell=1}^{n} P_\ell \right)$

Dr. rer. nat. M. Striebel

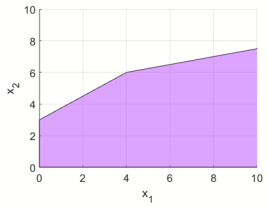
Anmerkungen :

- $\mathcal{M}$ muss nicht beschränkt sein ▶ 8

Definition (Beschränktheit)

Man nennt eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt* (in $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\|\vec{x}\| \leq C \; \forall \vec{x} \in M$ gilt.

Beispiel :



$$(LP_2) \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{u.d.N.} & \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

- Formal bezeichnet man den Schnitt von endlich vielen Halbräumen als konvexes Polyeder

  Ist das konvexe Polyeder zudem beschränkt, so nennt man es konvexes Polytop. ▶ 9

Manchmal aber auch genau umgekehrt

3.) Ist $\mathcal{M}$ beschränkt, so ist $\mathcal{M}$ die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten des $\mathbb{R}^n$ ▶ 10

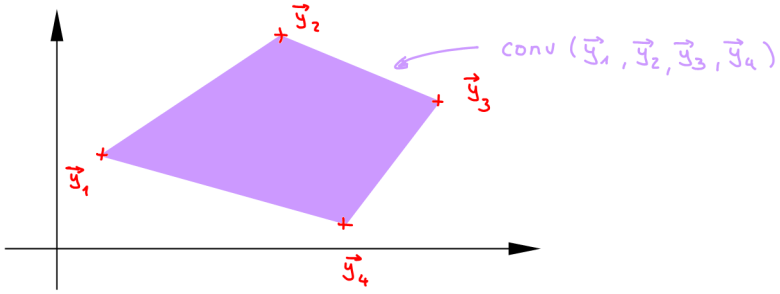
Definition (konvexe Hülle)

Für p Vektoren $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p$ des $\mathbb{R}^n$ nennt man

$$\text{conv}(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p) := \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \vec{y}_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in [0,1] \text{ mit } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\}$$

die *konvexe Hülle* der Vektoren $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p$

Beispiel zur Veranschaulichung der konvexen Hülle im $\mathbb{R}^2$ mit $p = 4$ ▶ 11



Weiß man, dass eine Menge eine konvexe Hülle ist, dann muss man nur die entsprechenden Punkte kennen, die diese konvexe Hülle erzeugen. ▶ 12

Bemerkung : Die Punkte einer konvexen Hülle, die sich nicht als Konvexkombination anderer Punkte der Menge beschreiben lassen heißen Ecken (oder Extrempunkte) Die Ecken genügen, um die Menge zu beschreiben. ▶ 13

Dr. rer. nat. M. Striebel

4.) Ist M beschränkt, so sind die Ecken von M diejenigen Schnittpunkte von mindestens n Hyperebenen, die alle Nebenbedingungen und alle Nichtnegativitätsbedingungen des LPs erfüllen. ▶ 14

genauer betrachtet: ▶ 15

- Die Hyperebenen die man schneiden könnte sind die „Grenzebenen" der Halbräume H_k^- & P_ℓ für $k = 1,\dots,m$ & $\ell = 1,\dots,n$:

Diese sind:

m Hyperebenen:

- $G_k = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, x_i = b_k \}$ ← Menge der Punkte des $\mathbb{R}^n$ die die k-te NB voll ausnützen

  für $k = 1,\dots,m$

n Hyperebenen:

- $G_{m+\ell} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_\ell = 0 \}$ ← Menge der Punkte, für die die ℓ-te Komponente gleich 0 ist

  für $\ell = 1,\dots,n$

$m+n$ Hyperebenen

- Die Menge M kann höchstens $\binom{m+n}{n}$ Ecken haben ▶ 16

  $= \binom{m+n}{m}$

Überlegungen zur Bestimmung des Schnittpunktes von n Hyperebenen ▶ 17

- Ausgangspunkt: n ausgewählte Hyperebenen: ▶ 18
  - $G_{\mu_1}, G_{\mu_2}, \dots, G_{\mu_n}$ mit $\mu_k \in \{1,\dots,m+n\}\ \forall k$ und $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$
  - Indexmenge der ausgewählten Hyperebenen: $N = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$
  - für $q \in \{0,\dots,n\}$ gelte: $\mu_q \le m$ & $\mu_{q+1} \ge m+1$

    d.h. $G_{\mu_1},\dots,G_{\mu_q}$ korrespondieren mit NBen

    d.h. $G_{\mu_{q+1}},\dots,G_{\mu_n}$ korrespondieren mit Nichtnegativitätsbedingungen

Dr. rer. nat. M. Striebel

gesucht: $\vec{y}_W \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{y}_W \in \underbrace{(G_{\mu_1} \cap G_{\mu_2} \cap \dots \cap G_{\mu_n})}_{= \bigcap_{\mu \in W} G_\mu}$

▶ 19

genauer / detaillierter:

mit $\vec{y}_W = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$

sind gesucht $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ so, dass

q Gleichungen →

$$\begin{aligned} a_{\mu_1,1}\, y_1 + a_{\mu_1,2}\, y_2 + \dots + a_{\mu_1,n}\, y_n &= b_{\mu_1} \\ &\vdots \\ a_{\mu_q,1}\, y_1 + a_{\mu_q,2}\, y_2 + \dots + a_{\mu_q,n}\, y_n &= b_{\mu_q} \end{aligned}$$

← $\vec{y}_W \in (G_{\mu_1} \cap G_{\mu_2} \cap \dots \cap G_{\mu_q})$
d.h. nutzt NBen $\mu_1, \dots, \mu_q$ voll aus

n-q Gleichungen →

$$\begin{aligned} y_{\mu_{q+1}-m} &= 0 \\ &\vdots \\ y_{\mu_n-m} &= 0 \end{aligned}$$

← $\vec{y}_W \in (G_{\mu_{q+1}} \cap \dots \cap G_{\mu_n})$
d.h. $(\mu_{q+1}-m)$-te, … (μ_n-m)-te Komponente von $\vec{y}_W$ ist 0

Beispiele

i)

$$(LP_1) \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{u.d.N. } \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

▶ 20

Video zur Übungsaufgabe

Es ergeben sich hier $4 + 2 = 6$ Hyperebenen:

- $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid -5x_1 + 3x_2 = 9 \right\}$
- $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 = 19 \right\}$
- $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 5x_1 + 3x_2 = 46 \right\}$
- $G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1 + x_2 = 18 \right\}$
- $G_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0 \right\}$
- $G_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 = 0 \right\}$

von denen jeweils zwei geschnitten werden können

Dr. rer. nat. M. Striebel

Damit erhält man als Kombinationen (μ_1, μ_2) und Schnittpunkte:

1.) $(1,2)$: $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

2.) $(1,3)$: $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 3,7 \\ 9,1\overline{6} \end{pmatrix}$ – widerspricht NB 2

3.) $(1,4)$: $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 4,\overline{09} \\ 9,\overline{81} \end{pmatrix}$ – widerspricht NBen 2 & 3

4.) $(1,5)$: $\vec{y}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

5.) $(1,6)$: $\vec{y}_5 = \begin{pmatrix} -1,8 \\ 0 \end{pmatrix}$ – widerspricht Nichtnegativitätsforderung $x_1 \geq 0$

6.) $(2,3)$: $\vec{y}_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

7.) $(2,4)$: $\vec{y}_7 = \begin{pmatrix} 5,\overline{6} \\ 6,\overline{6} \end{pmatrix}$ – widerspricht NB 3

8.) $(2,5)$: $\vec{y}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9,5 \end{pmatrix}$ – widerspricht NB 1

9.) $(2,6)$: $\vec{y}_9 = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \end{pmatrix}$ – widerspricht NBen 3 & 4

10) $(3,4)$: $\vec{y}_{10} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

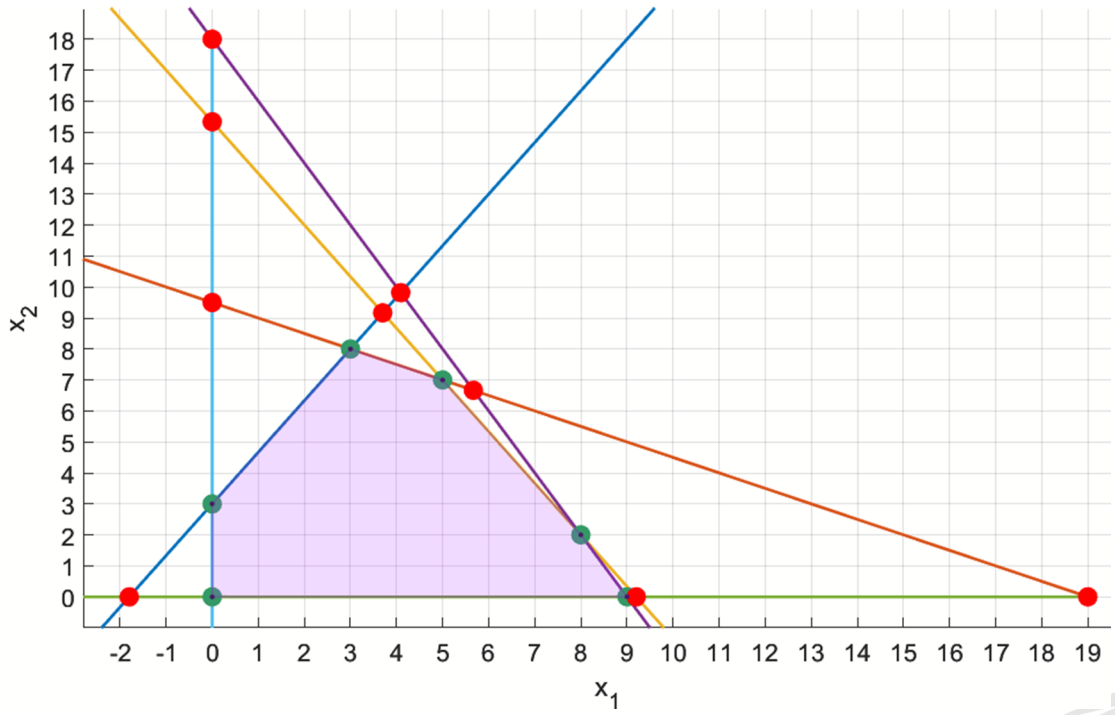
11.) $(3,5)$: $\vec{y}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15,\overline{3} \end{pmatrix}$ – widerspricht NBen 1 & 2

12.) $(3,6)$: $\vec{y}_{12} = \begin{pmatrix} 9,2 \\ 0 \end{pmatrix}$ – widerspricht NB 4

13.) $(4,5)$: $\vec{y}_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$ – widerspricht NBen 1, 2 & 3

14.) $(4,6)$: $\vec{y}_{14} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

15.) $(5,6)$: $\vec{y}_{15} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

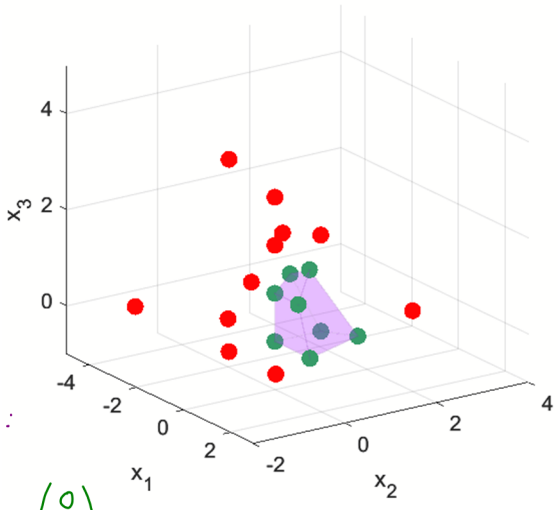


Dr. rer. nat. M. Striebel

ii)

$$\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = (1, 2, 3)^T \cdot \vec{x} \\ \text{u.N. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

▶ 21



Es ergeben sich nach obigem Vorgehen als Ecken von M:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte von jeweils mindestens 3 Hyperebenen, die nicht zulässige Lösungen sind, sind

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Ecken nach dem oben genannten Verfahren ist möglich, ist jedoch sehr rechenintensiv, ineffizient und umständlich.
Also: besser nicht so machen.

▶ 22

Dr. rer. nat. M. Striebel

Hilfsüberlegung: Vergrößerung des Systems durch Einführung von Schlupfvariablen

▶ 23

Ausgangspunkt: NB-System von (LP_s): $A\vec{x} \leq \vec{b} \wedge \vec{x} \geq \vec{0}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

m NBen & n Nichtnegativitätsbedingungen für n Strukturvariable

ist äquivalent zu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{s,1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{s,2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{s,m} = b_m \\ \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{s,1}, x_{s,2}, \ldots, x_{s,m} \geq 0 \end{cases}$$

m NBen & n+m Nichtnegativitätsbed. für n Struktur- & m Schlupfvariablen

in Matrix-Vektor-Notation:

▶ 24

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{s1} \\ x_{s2} \\ \vdots \\ x_{sm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{s,1}, x_{s,2}, \ldots, x_{s,m})^T \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

bzw. $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \;\wedge\; \vec{x} \geq \vec{0}$ ← NBen & Nichtnegativitätsforderungen von

$$(LP_N) \quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & A\vec{x} = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

mit

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n+m} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n+m}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$

  wobei $A = (A, E_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ wobei $\vec{b} = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

- $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ wobei $\vec{c} = \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{S1} \\ x_{S2} \\ \vdots \\ x_{Sm} \end{pmatrix}$

↳ d.h. $x_1, \ldots, x_n$ korrespondieren mit Entscheidungskomponenten

$x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ korrespondieren mit NBen:

▶ 25

$x_{n+\ell}$	$=$	0	$\Leftrightarrow$	ℓ. NB vollständig ausgenutzt } ℓ. NB eingehalten
$x_{n+\ell}$	$>$	0	$\Leftrightarrow$	ℓ. NB „übererfüllt" } ℓ. NB eingehalten
$x_{n+\ell}$	$<$	0	$\Leftrightarrow$	ℓ. NB nicht eingehalten

Dr. rer. nat. M. Striebel

somit entspricht die Suche nach $\vec{y}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{y}_{\mathcal{N}} \in \left(\mathcal{G}_{\mu_1} \cap \mathcal{G}_{\mu_2} \cap \ldots \cap \mathcal{G}_{\mu_n}\right) = \bigcap_{\mu \in \mathcal{N}} \mathcal{G}_\mu$

▶ 26

genauer

$y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ so, dass

q Gleichungen →

$$\begin{aligned} a_{\mu_1,1}\, y_1 + a_{\mu_1,2}\, y_2 + \ldots + a_{\mu_1,n}\, y_n &= b_{\mu_1} \\ &\vdots \\ a_{\mu_q,1}\, y_1 + a_{\mu_q,2}\, y_2 + \ldots + a_{\mu_q,n}\, y_n &= b_{\mu_q} \end{aligned}$$

$\vec{y}_{\mathcal{N}} \in (\mathcal{G}_{\mu_1} \cap \mathcal{G}_{\mu_2} \cap \ldots \cap \mathcal{G}_{\mu_q})$
d.h. nutzt NBen $\mu_1, \ldots, \mu_q$ voll aus

n-q Gleichungen →

$$\begin{aligned} y_{\mu_{q+1}-m} &= 0 \\ &\vdots \\ y_{\mu_n-m} &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{y}_{\mathcal{N}} \in (\mathcal{G}_{\mu_{q+1}} \cap \ldots \cap \mathcal{G}_{\mu_n})$
d.h. $(\mu_{q+1}-m)$-te, … (μ_n-m)-te Komponente von $\vec{y}_{\mathcal{N}}$ ist 0

zur gegebenen Indexmenge $\mathcal{N} = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$

der Suche nach $\vec{y}_{\mathcal{N}} = (y_1, \ldots, y_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$, so dass $A\vec{y}_{\mathcal{N}} = \vec{b}$ mit

- $y_{\mu_{q+1}-m} = \ldots = y_{\mu_n-m} = 0$
- $y_{n+\mu_1} = \ldots = y_{n+\mu_q} = 0.$

Wegen:

- $\mathcal{N} = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\} \subseteq \{1, \ldots, m+n\}$

▶ 27

- $\{\mu_1, \ldots, \mu_q\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$
- $\{\mu_{q+1}, \ldots, \mu_n\} \subseteq \{m+1, \ldots, m+n\}$

ist:

- $\{\mu_{q+1} - m, \ldots, \mu_n - m\} \subseteq \{m+1-m, \ldots, m+n-m\} = \{1, \ldots, n\}$
- $\{n+\mu_1, \ldots, n+\mu_q\} \subseteq \{n+1, \ldots, n+m\}$

und daher: $\{\mu_{q+1} - m, \ldots, \mu_n - m\} \cup \{n+\mu_1, \ldots, n+\mu_q\} \subseteq \{1, \ldots, n+m\}$

$=: \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$

Somit ist
- $y_{\mu_{q+1}-m} = \ldots = y_{\mu_n-m} = 0$
- $y_{n+\mu_1} = \ldots = y_{n+\mu_q} = 0.$

gleichbedeutend zu $y_{\nu_1} = \ldots = y_{\nu_n} = 0$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Mit der Indexmenge $\mathcal{B} := \{\beta_1, \dots, \beta_m\} := \{1, \dots, n+m\} \setminus \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ ist

▶ 28

- $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \sum_{\kappa=1}^{n+m} \vec{a}_\kappa \cdot x_\kappa = \vec{b} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} \vec{a}_{\beta_j} x_j + \sum_{\ell=1}^{n} \vec{a}_{\nu_\ell} x_\ell = \vec{b}$

- insbesondere: $A\vec{y}_W = \vec{b}$ mit $y_{\nu_1} = \dots = y_{\nu_n} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} \vec{a}_{\beta_j} y_{\beta_j} = \vec{b} \quad \text{und} \quad y_{\nu_1} = \dots = y_{\nu_n} = 0$$

$$\text{mit } \vec{y}_W = (y_1, \dots, y_{n+m})^T$$

$$\Leftrightarrow A_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} y_{\beta_1} \\ \vdots \\ y_{\beta_m} \end{pmatrix} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A_{\mathcal{B}} = (\vec{a}_{\beta_1}, \dots, \vec{a}_{\beta_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$\text{und} \quad \begin{pmatrix} y_{\nu_1} \\ \vdots \\ y_{\nu_n} \end{pmatrix} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$$

Es ergibt sich ein alternatives Vorgehen zur Bestimmung der Schnittpunkte von je n Hyperebenen (zu (LP_3))

1.) Wähle m Indizes $\beta_1, \dots, \beta_m \in \{1, \dots, n+m\}$ und $\mathcal{B} := \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ ▶ 29

2.) Bilde die Matrix $A_{\mathcal{B}} = (\vec{a}_{\beta_1}, \dots, \vec{a}_{\beta_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$

3.) Falls $\operatorname{rang}(A_{\mathcal{B}}) = m$ ist:

- bestimme die (eindeutige) Lösung $\vec{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ des LGS $A_{\mathcal{B}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$
- Definiere $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit

$$y_{\beta_1} = x_1, \; y_{\beta_2} = x_2, \dots, y_{\beta_m} = x_m \quad \text{und} \quad y_\nu = 0 \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n+m\} \setminus \mathcal{B}$$

- $\vec{y}_W := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist dann der Schnittpunkt von n Hyperebenen

- falls $\vec{x}_{\mathcal{B}} \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ ist, ist $\vec{y}_W$ eine Ecke von $\mathcal{M}$

▶ 30

Nachdem man dies mit allen Auswahlmöglichkeiten für die Indizes $\beta_1, \dots, \beta_m$ durchgeführt hat – es gibt $\binom{m+n}{m}$ solche Wahlmöglichkeiten – hat man alle Schnittpunkte von jeweils n Hyperebenen bestimmt.

Dr. Ing. M. Stiebel

Beispiel

▶ 31

$$(LP_S)\quad \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

▶ 32 im Video: Bewertung des Vorgehens und Ausblick!

hier ist $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ & $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix}$

damit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix}$

1.) Wähle $\beta_1 = 1, \beta_2 = 4, \beta_3 = 5, \beta_4 = 6$ ← beliebige Wahl von 4 Elementen aus $\{1,2,3,4,5,6\}$

2.) $A_B = (\vec{a}_1, \vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6)$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.) zu lösen: $A_B \cdot \vec{x} = \vec{b}$

- via Gauß-Jordan-Verfahren

$$(A_B \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 46 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-1/5) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot 1 \\ \cdot 2/5 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 104/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 108/5 \end{array}\right) \cdot(-1/5)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -9/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 104/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 108/5 \end{array}\right) \quad \text{somit} \quad \vec{x}_B = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 104/5 \\ 55 \\ 108/5 \end{pmatrix}$$

- $\vec{y} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 0 \\ 0 \\ 104/5 \\ 55 \\ 108/5 \end{pmatrix}$ ← $\beta_1 = 1$, ← $\beta_2 = 4$, ← $\beta_3 = 5$, ← $\beta_4 = 6$

- $\vec{y}_W = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\vec{x}_B \not\ge \vec{0} \Rightarrow \vec{y}_W$ ist keine Ecke

Es ergibt sich ein alternatives Vorgehen zur Bestimmung der Schnittpunkte von je n Hyperebenen (zu (LP_S))

1.) Wähle m Indizes $\beta_1, \dots, \beta_m \in \{1, \dots, n+m\}$ und $\mathcal{B} := \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

2.) Bilde die Matrix $A_B = (\vec{a}_{\beta_1}, \dots, \vec{a}_{\beta_m}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$

3.) Falls $\operatorname{rang}(A_B) = m$ ist:

- bestimme die (eindeutige) Lösung $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ des LGS $A_B \cdot \vec{x} = \vec{b}$
- Definiere $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit

$$y_{\beta_1} = x_1, y_{\beta_2} = x_2, \dots, y_{\beta_m} = x_m \quad \text{und} \quad y_\nu = 0 \ \forall \nu \in \{1, \dots, n+m\} \setminus \mathcal{B}$$

- $\vec{y}_W := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist dann der Schnittpunkt von n Hyperebenen
- falls $\vec{x}_B \ge \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ ist, ist $\vec{y}_W$ eine Ecke von M

Dr. rer. nat. M. Striebel