Struktur linearer Optimierungsprobleme

Ausgangspunkt: Lineares Programm in Standardform

$$(LP_s) \quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^n$

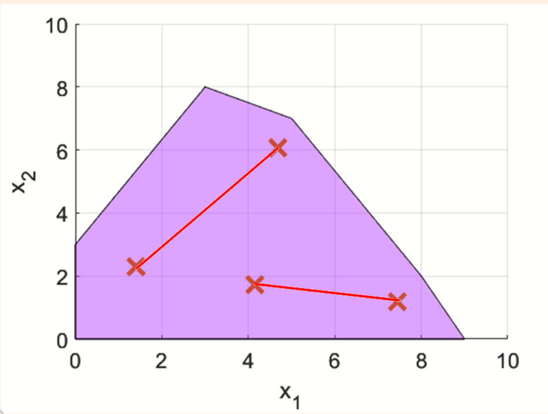
$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$

1.) Die Menge $\mathcal{M} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} \leq \vec{b} \wedge \vec{x} \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^n\}$ der zulässigen Lösungen ist konvex

„$\mathcal{M}$ ist konvex" bedeutet:

- formal: $\forall\, \vec{y}, \vec{w} \in \mathcal{M}$ gilt: $\underbrace{\lambda\vec{y} + (1-\lambda)\cdot\vec{w}}_{\text{Konvexkombination von } \vec{y},\, \vec{w}} \in \mathcal{M} \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$

- anschaulich: für je zwei Elemente von $\mathcal{M}$ sind auch alle Punkte auf einer gedachten Verbindungsstrecke dieser beiden Elemente selbst auch Elemente von $\mathcal{M}$



Menge der zulässigen Lösungen für

$$(LP_1) \quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

2.) $\mathcal{M}$ ist der Durchschnitt von $n+m$ Halbräumen.

genauer: mit $H_k^- = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, x_i \leq b_k\}$ ← Menge der Punkte des $\mathbb{R}^n$ die die k-te NB erfüllen

für $k = 1, \dots, m$

und $P_\ell = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_\ell \geq 0\}$ ← Menge der Punkte, für die die ℓ-te Komponente nicht negativ ist

für $\ell = 1, \dots, n$

ist $\mathcal{M} = \left(\bigcap_{k=1}^{m} H_k^-\right) \cap \left(\bigcap_{\ell=1}^{n} P_\ell\right)$

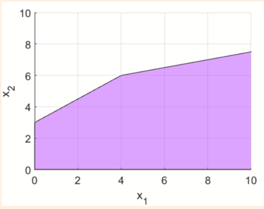
Anmerkungen :

- $\mathcal{M}$ muss nicht beschränkt sein

Definition (Beschränktheit)

Man nennt eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt* (in $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\|\vec{x}\| \leq C \ \forall \vec{x} \in M$ gilt.

Beispiel :



...

$$(LP_2) \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

- Formal bezeichnet man den Schnitt von endlich vielen Halbräumen als konvexes Polyeder
  Ist das konvexe Polyeder zudem beschränkt, so nennt man es konvexes Polytop.

Manchmal aber auch genau umgekehrt

3.) Ist $\mathcal{M}$ beschränkt, so ist $\mathcal{M}$ die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten des $\mathbb{R}^n$

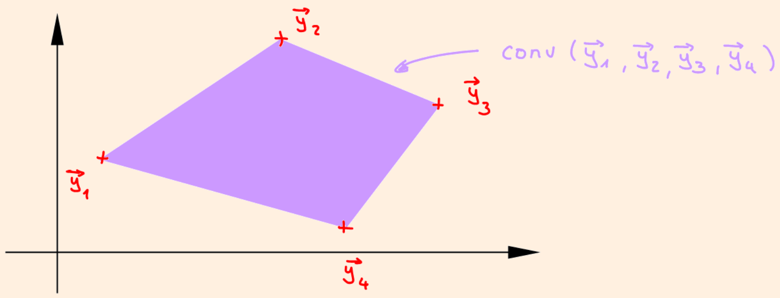
Definition (konvexe Hülle)

Für p Vektoren $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p$ des $\mathbb{R}^n$ nennt man

$$\operatorname{conv}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p) := \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \vec{y}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in [0,1] \text{ mit } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\}$$

die *konvexe Hülle* der Vektoren $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p$

Beispiel zur Veranschaulichung der konvexen Hülle im $\mathbb{R}^2$ mit $p = 4$



Weiß man, dass eine Menge eine konvexe Hülle ist, dann muss man nur die entsprechenden Punkte kennen, die diese konvexe Hülle erzeugen.

Bemerkung : Die Punkte einer konvexen Hülle, die sich nicht als Konvexkombination anderer Punkte der Menge beschreiben lassen heißen Ecken (oder Extrempunkte). Die Ecken genügen, um die Menge zu beschreiben.

4.) Ist $\mathcal{M}$ beschränkt, so sind die Ecken von $\mathcal{M}$ diejenigen Schnittpunkte von mindestens n Hyperebenen, die alle Nebenbedingungen und alle Nichtnegativitätsbedingungen des LPs erfüllen.

genauer betrachtet:

- Die Hyperebenen die man schneiden könnte sind die „Grenzebenen" der Halbräume H_k^- & P_ℓ für $k = 1, \dots, m$ & $\ell = 1, \dots, n$:

  Diese sind:

m Hyperebenen

- $G_k = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = b_k \}$ ← Menge der Punkte des $\mathbb{R}^n$ die die k-te NB voll ausnützen

  für $k = 1, \dots, m$

n Hyperebenen

- $G_{m+\ell} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_\ell = 0 \}$ ← Menge der Punkte, für die die ℓ-te Komponente gleich 0 ist

  für $\ell = 1, \dots, n$

m+n Hyperebenen

- Die Menge $\mathcal{M}$ kann höchstens $\underbrace{\binom{m+n}{n}}_{= \binom{m+n}{m}}$ Ecken haben

Überlegungen zur Bestimmung des Schnittpunktes von n Hyperebenen

- Ausgangspunkt: n ausgewählte Hyperebenen:
  - $G_{\mu_1}, G_{\mu_2}, \dots, G_{\mu_n}$ mit $\mu_k \in \{1, \dots, m+n\}$ $\forall k$ und $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$
  - Indexmenge der ausgewählten Hyperebenen: $\mathcal{N} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$
  - für $q \in \{0, \dots, n\}$ gelte: $\mu_q \leq m$ & $\mu_{q+1} \geq m+1$

    d.h. $G_{\mu_1}, \dots, G_{\mu_q}$ korrespondieren mit NBen

    d.h. $G_{\mu_{q+1}}, \dots, G_{\mu_n}$ korrespondieren mit Nichtnegativitätsbedingungen gesucht : $\vec{y}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{y}_{\mathcal{N}} \in \big(\underbrace{G_{\mu_1} \cap G_{\mu_2} \cap \ldots \cap G_{\mu_n}}_{= \bigcap_{\mu \in \mathcal{N}} G_\mu}\big)$

genauer / detaillierter:

mit $\vec{y}_{\mathcal{N}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$

Sind gesucht $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ so, dass

q Gleichungen →

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{\mu_1,1}\, y_1 + a_{\mu_1,2}\, y_2 + \ldots + a_{\mu_1,n}\, y_n = b_{\mu_1} \\ \quad\vdots \\ a_{\mu_q,1}\, y_1 + a_{\mu_q,2}\, y_2 + \ldots + a_{\mu_q,n}\, y_n = b_{\mu_q} \end{array}}$$

$\vec{y}_{\mathcal{N}} \in (G_{\mu_1} \cap G_{\mu_2} \cap \ldots \cap G_{\mu_q})$
d.h. nutzt NBen $\mu_1, \ldots, \mu_q$ voll aus

n−q Gleichungen →

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{\mu_{q+1}-m} = 0 \\ \quad\vdots \\ y_{\mu_n-m} = 0 \end{array}}$$

$\vec{y}_{\mathcal{N}} \in (G_{\mu_{q+1}} \cap \ldots \cap G_{\mu_n})$
d.h. $(\mu_{q+1}-m)$-te, … (μ_n-m)-te Komponente von $\vec{y}_{\mathcal{N}}$ ist 0

Beispiele

i)

$$(LP_1)\ \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

Video zur Übungsaufgabe

Es ergeben sich hier $4+2=6$ Hyperebenen:

- $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; -5x_1 + 3x_2 = 9 \right\}$
- $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 19 \right\}$
- $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; 5x_1 + 3x_2 = 46 \right\}$
- $G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 + x_2 = 18 \right\}$
- $G_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 = 0 \right\}$
- $G_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 = 0 \right\}$

von denen jeweils zwei geschnitten werden können

Damit erhält man als Kombinationen (μ_1, μ_2) und Schnittpunkte:

1.) $(1,2)$: $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

2.) $(1,3)$: $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 9{,}1\overline{6} \end{pmatrix}$ – widerspricht NB 2

3.) $(1,4)$: $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 4{,}\overline{09} \\ 9{,}\overline{81} \end{pmatrix}$ – widerspricht NBen 2 & 3

4.) $(1,5)$: $\vec{y}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

5.) $(1,6)$: $\vec{y}_5 = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$ – widerspricht Nichtnegativitätsforderung $x_1 \geq 0$

6.) $(2,3)$: $\vec{y}_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

7.) $(2,4)$: $\vec{y}_7 = \begin{pmatrix} 5{,}\overline{6} \\ 6{,}\overline{6} \end{pmatrix}$ – widerspricht NB 3

8.) $(2,5)$: $\vec{y}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9{,}5 \end{pmatrix}$ – widerspricht NB 1

9.) $(2,6)$: $\vec{y}_9 = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \end{pmatrix}$ – widerspricht NBen 3 & 4

10) $(3,4)$: $\vec{y}_{10} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

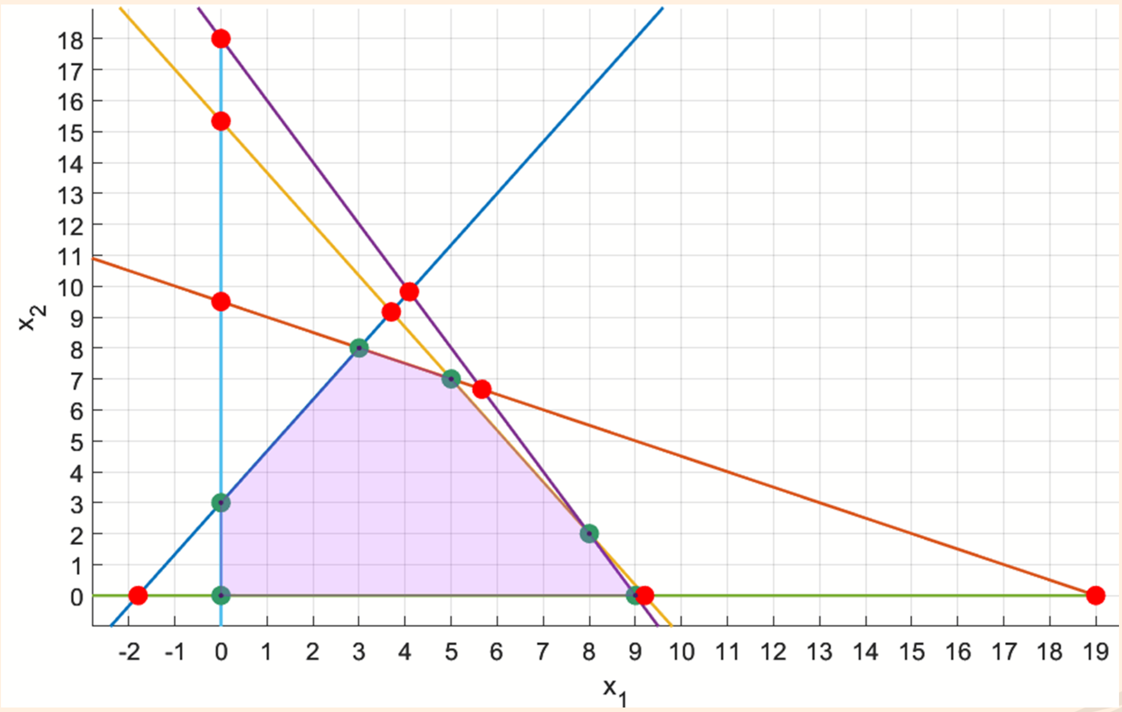
11.) $(3,5)$: $\vec{y}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15{,}\overline{3} \end{pmatrix}$ – widerspricht NBen 1 & 2

12) $(3,6)$: $\vec{y}_{12} = \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$ – widerspricht NB 4

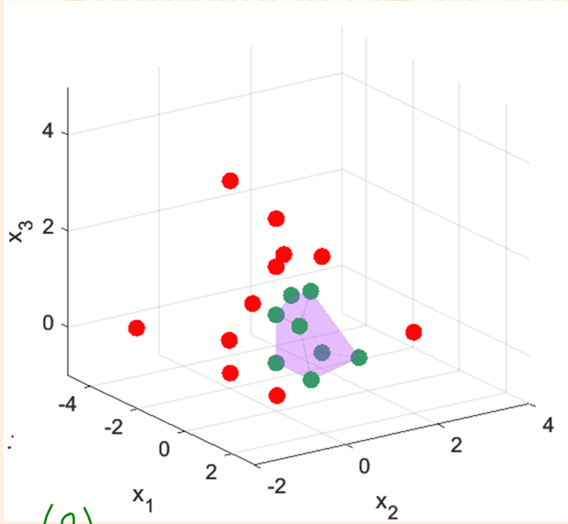
13) $(4,5)$: $\vec{y}_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$ – widerspricht NBen 1, 2 & 3

14.) $(4,6)$: $\vec{y}_{14} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

15.) $(5,6)$: $\vec{y}_{15} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



ii)
$$\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = (1,2,3)^T \cdot \vec{x} \\[1em] \text{udN. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\[1em] \qquad \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$



Es ergeben sich nach obigem Vorgehen als Ecken von $\mathcal{M}$:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte von jeweils mindestens 3 Hyperebenen, die <u>nicht</u> zulässige Lösungen sind, sind

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

⚠ Die Berechnung der Ecken nach dem oben genannten Verfahren ist möglich, ist jedoch sehr rechenintensiv, ineffizient und umständlich.
Also: besser nicht <u>so</u> machen.

Hilfsüberlegung: Vergrößerung des Systems durch Einführung von Schlupfvariablen

Ausgangspunkt: NB-System von (LP_S) : $A\vec{x} \leq \vec{b} \;\wedge\; \vec{x} \geq \vec{0}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

m NBen & n Nichtnegativitätsbedingungen für n Strukturvariable

ist äquivalent zu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{S,1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{S,2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{S,m} = b_m \\ \\ x_1, x_2, \dots, x_n, x_{S,1}, x_{S,2}, \dots, x_{S,m} \geq 0 \end{cases}$$

m NBen & n+m Nichtnegativitätsbed. für n Struktur- & m Schlupfvariablen

in Matrix-Vektor-Notation:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{S1} \\ x_{S2} \\ \vdots \\ x_{Sm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{S,1}, x_{S,2}, \dots, x_{S,m})^T \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

bzw. $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \ \wedge \ \vec{x} \geq \vec{0}$ ← NBen & Nichtnegativitätsforderungen von

$$(LP_N) \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T} \vec{x} \\ \text{ud N.} & A\vec{x} = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

mit

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n+m} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+m}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$$

  wobei $$A = (A, E_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \text{wobei} \quad \vec{b} = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- $$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \qquad \text{wobei} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \qquad \text{wobei} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{S1} \\ x_{S2} \\ \vdots \\ x_{Sm} \end{pmatrix}$$

d.h. $x_1, \dots, x_n$ korrespondieren mit Entscheidungskomponenten

$x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ korrespondieren mit NBen:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+\ell} = 0 \iff \ell.\text{ NB vollständig ausgenutzt} \\ x_{n+\ell} > 0 \iff \ell.\text{ NB „übererfüllt"} \end{array}\right\} \ell.\text{ NB eingehalten}$$

$$x_{n+\ell} < 0 \iff \ell.\text{ NB nicht eingehalten}$$

Somit entspricht die Suche nach $\vec{y}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{y}_{\mathcal{N}} \in \Big(\underbrace{G_{\mu_1} \cap G_{\mu_2} \cap \dots \cap G_{\mu_n}}_{= \bigcap_{\mu \in \mathcal{N}} G_\mu} \Big)$

genauer

$y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ so, dass

q Gleichungen

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{\mu_1,1}\, y_1 + a_{\mu_1,2}\, y_2 + \dots + a_{\mu_1,n}\, y_n = b_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_{\mu_q,1}\, y_1 + a_{\mu_q,2}\, y_2 + \dots + a_{\mu_q,n}\, y_n = b_{\mu_q} \end{array}}$$

$\vec{y}_{\mathcal{N}} \in (G_{\mu_1} \cap G_{\mu_2} \cap \dots \cap G_{\mu_q})$
d.h. nutzt NBen $\mu_1, \dots, \mu_q$ voll aus

n-q Gleichungen

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{\mu_{q+1}-m} = 0 \\ \vdots \\ y_{\mu_n - m} = 0 \end{array}}$$

$\vec{y}_{\mathcal{N}} \in (G_{\mu_{q+1}} \cap \dots \cap G_{\mu_n})$
d.h. $(\mu_{q+1} - m)$-te, … $(\mu_n - m)$-te Komponente von $\vec{y}_{\mathcal{N}}$ ist 0

zur gegebenen Indexmenge $\mathcal{N} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$

der Suche nach $\vec{y}_{\mathcal{N}} = (y_1, \dots, y_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$, so dass $A\vec{y}_{\mathcal{N}} = \vec{b}$ mit

- $y_{\mu_{q+1}-m} = \dots = y_{\mu_n - m} = 0$
- $y_{n+\mu_1} = \dots = y_{n+\mu_q} = 0.$

Wegen:
- $\mathcal{N} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} \subseteq \{1, \dots, m+n\}$
- $\{\mu_1, \dots, \mu_q\} \subseteq \{1, \dots, m\}$
- $\{\mu_{q+1}, \dots, \mu_n\} \subseteq \{m+1, \dots, m+n\}$

ist:
- $\{\mu_{q+1} - m, \dots, \mu_n - m\} \subseteq \{m+1-m, \dots, m+n-m\} = \{1, \dots, n\}$
- $\{n+\mu_1, \dots, n+\mu_q\} \subseteq \{n+1, \dots, n+m\}$

und daher: $\boxed{\{\mu_{q+1} - m, \dots, \mu_n - m\} \cup \{n+\mu_1, \dots, n+\mu_q\}} \subseteq \{1, \dots, n+m\}$

$=: \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$

Somit ist
- $y_{\mu_{q+1}-m} = \dots = y_{\mu_n-m} = 0$
- $y_{n+\mu_1} = \dots = y_{n+\mu_q} = 0.$

gleichbedeutend zu $y_{\nu_1} = \dots = y_{\nu_n} = 0$

Mit der Indexmenge $\mathcal{B} := \{\beta_1, \dots, \beta_m\} := \{1, \dots, n+m\} \setminus \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ ist

- $A\vec{x} = \vec{b} \iff \sum_{k=1}^{n+m} \vec{a}_k \cdot x_k = \vec{b} \iff \sum_{j=1}^{m} \vec{a}_{\beta_j} x_j + \sum_{\ell=1}^{n} \vec{a}_{\nu_\ell} x_\ell = \vec{b}$

- insbesondere : $A\vec{y}_{\mathcal{V}} = \vec{b}$ mit $y_{\nu_1} = \dots = y_{\nu_n} = 0$

$$\iff \sum_{j=1}^{m} \vec{a}_{\beta_j} y_{\beta_j} = \vec{b} \text{ und } y_{\nu_1} = \dots = y_{\nu_n} = 0$$

$$\text{mit } \vec{y}_{\mathcal{V}} = (y_1, \dots, y_{n+m})^T$$

$$\iff A_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} y_{\beta_1} \\ \vdots \\ y_{\beta_m} \end{pmatrix} = \vec{b} \text{ mit } A_{\mathcal{B}} = (\vec{a}_{\beta_1}, \dots, \vec{a}_{\beta_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$\text{und } \begin{pmatrix} y_{\nu_1} \\ \vdots \\ y_{\nu_n} \end{pmatrix} = \vec{o} \in \mathbb{R}^n$$

Es ergibt sich ein alternatives Vorgehen zur Bestimmung der Schnittpunkte von je n Hyperebenen (zu (LP_S))

1.) Wähle m Indizes $\beta_1, \dots, \beta_m \in \{1, \dots, n+m\}$ und $\mathcal{B} := \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

2.) Bilde die Matrix $A_{\mathcal{B}} = (\vec{a}_{\beta_1}, \dots, \vec{a}_{\beta_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$

3.) Falls $\operatorname{rang}(A_{\mathcal{B}}) = m$ ist :

- bestimme die (eindeutige) Lösung $\vec{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ des LGS $A_{\mathcal{B}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

- Definiere $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit

$$y_{\beta_1} = x_1,\ y_{\beta_2} = x_2, \dots, y_{\beta_m} = x_m \text{ und } y_\nu = 0 \ \forall\, \nu \in \{1, \dots, n+m\} \setminus \mathcal{B}$$

- $\vec{y}_{\mathcal{V}} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist dann der Schnittpunkt von n Hyperebenen

- falls $\vec{x}_{\mathcal{B}} \geq \vec{o} \in \mathbb{R}^m$ ist, ist $\vec{y}_{\mathcal{V}}$ eine Ecke von $\mathcal{M}$

Nachdem man dies mit allen Auswahlmöglichkeiten für die Indizes $\beta_1, \dots, \beta_m$ durchgeführt hat – es gibt $\binom{m+n}{m}$ solche Wahlmöglichkeiten – hat man alle Schnittpunkte von jeweils n Hyperebenen bestimmt.

Beispiel

$$(LP_5)\begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \qquad \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

hier ist $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ & $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix}$

damit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix}$

1.) Wähle $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 4,\ \beta_3 = 5,\ \beta_4 = 6$ ← beliebige Wahl von 4 Elementen aus $\{1,2,3,4,5,6\}$

2.) $A_{\mathcal{B}} = (\vec{a}_1, \vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6)$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.) zu lösen: $A_{\mathcal{B}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

- via Gauß-Jordan-Verfahren

$$(A_{\mathcal{B}} \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 46 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \begin{matrix} 1/5 \quad 1 \quad 2/5 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 104/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 108/5 \end{array}\right) \cdot(-1/5)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -9/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 104/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 108/5 \end{array}\right) \qquad \text{somit} \quad \vec{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 104/5 \\ 55 \\ 108/5 \end{pmatrix}$$

- $\vec{y} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 0 \\ 0 \\ 104/5 \\ 55 \\ 108/5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \beta_1 = 1 \\ \\ \\ \leftarrow \beta_2 = 4 \\ \leftarrow \beta_3 = 5 \\ \leftarrow \beta_4 = 6 \end{matrix}$

- $\vec{y}_w = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\vec{x}_{\mathcal{B}} \not\ge \vec{0} \Rightarrow \vec{y}_w$ ist keine Ecke

Es ergibt sich ein alternatives Vorgehen zur Bestimmung der Schnittpunkte von je n Hyperebenen (zu (LP_s))

1.) Wähle m Indizes $\beta_1, \dots, \beta_m \in \{1, \dots, n+m\}$ und $\mathcal{B} := \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

2.) Bilde die Matrix $A_{\mathcal{B}} = (\vec{a}_{\beta_1}, \dots, \vec{a}_{\beta_m}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$

3.) Falls $\operatorname{rang}(A_{\mathcal{B}}) = m$ ist:

- bestimme die (eindeutige) Lösung $\vec{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ des LGS $A_{\mathcal{B}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$
- Definiere $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit

  $y_{\beta_1} = x_1,\ y_{\beta_2} = x_2, \dots, y_{\beta_m} = x_m$ und $y_\nu = 0 \quad \forall\, \nu \in \{1, \dots, n+m\} \setminus \mathcal{B}$

- $\vec{y}_w := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist dann der Schnittpunkt von n Hyperebenen

- falls $\vec{x}_{\mathcal{B}} \ge \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ ist, ist $\vec{y}_w$ eine Ecke von $\mathcal{M}$

Problem: Mit dem bisher vorgestellten Verfahren zur Bestimmung der Ecken von $\mathcal{M}$ müssen immer noch zunächst alle Schnittpunkte von allen Hyperebenen bestimmt und bei allen muss überprüft werden, ob es sich um zulässige Punkte handelt oder nicht.

Idee: Wechsle von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

notwendig: ein wenig theoretische Beschäftigung mit linearen Gleichungssystemen

Definition (Basis- & Nichtbasismenge, Basis- & Nichtbasisvariablen, Basislösung)

Ausgehend von einem LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ mit gegebener

Systemmatrix $A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} & \dots & \vec{a_p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ und rechter Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

nennt man die Indexmenge $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \subseteq \{1, \dots, p\}$ eine *Basismenge* von A, wenn die Matrix

$$A_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \vec{a}_{\beta_1} & \vec{a}_{\beta_2} & \dots & \vec{a}_{\beta_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

regulär ist.

Die Indexmenge $\mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_{p-m}\} := \{1, \dots, p\} \setminus \mathcal{B}$ heißt dann die *(zu $\mathcal{B}$ gehörende) Nichtbasismenge*.

Ist $\mathcal{B}$ eine Basismenge und $\mathcal{N}$ die zugehörige Nichtbasismenge von A, so nennt man

- die Komponenten
  - $\star$ $x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_m}$ von $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ *Basisvariablen* und
  - $\star$ $x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_{p-m}}$ von $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ *Nichtbasisvariablen*
- die Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ von $A\vec{x} = \vec{b}$, für die alle Nichtbasisvariablen gleich Null, sind eine *Basislösung*.

Beispiele

i) zum LGS $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix}$

- ist $\mathcal{B} = \{1, 4, 5, 6\}$ eine Basismenge mit zugehöriger Nichtbasismenge $\mathcal{N} = \{2, 3\}$

  und Basislösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 0 \\ 0 \\ 104/5 \\ 55 \\ 108/5 \end{pmatrix}$

- $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 11 \\ 16 \\ 38 \\ 15 \end{pmatrix}$ ist auch eine Lösung, aber keine Basislösung zu $\mathcal{B}$ $\quad \neq 0$

▶ 7 ii) zum LGS $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ist $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ keine Basismenge, denn

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist nicht regulär}$$

- ist $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ ist eine Basismenge mit zugehöriger Nichtbasismenge $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$

und zugehöriger Basislösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow x_4 \\ \leftarrow x_5 \\ \leftarrow x_6 \end{matrix}$

▶ 8 iii) zum LGS

$$\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ \vec{e}_2 & & \vec{e}_4 & & \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \end{array}$$

ist $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ mit $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 6$, $\beta_4 = 3$ eine Basismenge, denn

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

damit zugehörige Nichtbasismenge: $\mathcal{N} = \{2, 4\}$

und Basislösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 + (-4) \cdot \vec{e}_4$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ x_5}}{2} \cdot \vec{a}_5 + \underset{\substack{\uparrow \\ x_1}}{3} \cdot \vec{a}_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ x_6}}{1} \cdot \vec{a}_6 + \underset{\substack{\uparrow \\ x_3}}{(-4)} \vec{a}_3 + \underset{\substack{\uparrow \\ x_2}}{0} \cdot \vec{a}_2 + \underset{\substack{\uparrow \\ x_4}}{0} \cdot \vec{a}_4$$

Besonders einfach erhält man eine Basismenge, eine Basislösung und sogar eine Beschreibung der allgemeinen Lösung eines LGS in kanonischer Normalform:

Satz (allgemeine Lösung für ein LGS in kanonischer Normalform)

▶ 9

Gegeben sei ein LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ in kanonischer Normalform mit zugehörigen Indexmenge $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, so dass $\vec{a}_{\beta_k} = \vec{e}_k$ für $k = 1, \ldots, m$.

Dann ist

i.) $\mathcal{B}$ eine Basismenge von A mit zugehöriger Nichtbasismenge $\mathcal{N} = \{\nu_1, \ldots, \nu_{p-m}\}$

ii.) Eine Basislösung $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_p)^T$ zu $\mathcal{B}$ aus i.) gegeben durch

- $w_{\beta_k} = b_k$ für $k = 1, \ldots, m$
- $w_\nu = 0$ für $\nu \in \mathcal{N}$

iii.) die allgemeine Lösung des LGS gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \vec{w} + \sum_{l=1}^{p-m} \alpha_l \cdot \vec{u}_l \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-m} \in \mathbb{R} \right\}$$

mit

- der Basislösung $\vec{w}$ aus ii.) und
- $\vec{u}_l = (u_{l,1}, \ldots, u_{l,p})^T$ für $l = 1, \ldots, p-m$, definiert durch
  - ⋆ $u_{l,\nu_l} = 1$, Element von A in Zeile k, Spalte ν_e
  - ⋆ $u_{l,\beta_k} = -a_{k,\nu_l}$ für $k = 1, \ldots, m$
  - ⋆ $u_{l,j} = 0$ für alle $j \in \mathcal{N} \setminus \{\nu_l\}$

Element β_k des Vektors $\vec{u}_e$

Beispiel: ▶ 10

Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{matrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{4 \times 6} \quad \& \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

ist in kanonischer Normalform mit $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ für $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 6$, $\beta_4 = 3$

Dann ist nach obigem Satz:

i) $\mathcal{B} = \{5, 1, 6, 3\}$ eine Basismenge von A mit zugehöriger Nichtbasismenge $\mathcal{N} = \{2, 4\}$

ii) die zugehörige Basislösung:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii) mit $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wie gesehen

ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

▶ 11

zurück zur Idee: Wechsle von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke auf der Suche nach einer Beschreibung von $\mathcal{M} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} \leq \vec{b} \;\wedge\; \vec{x} \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^n \}$

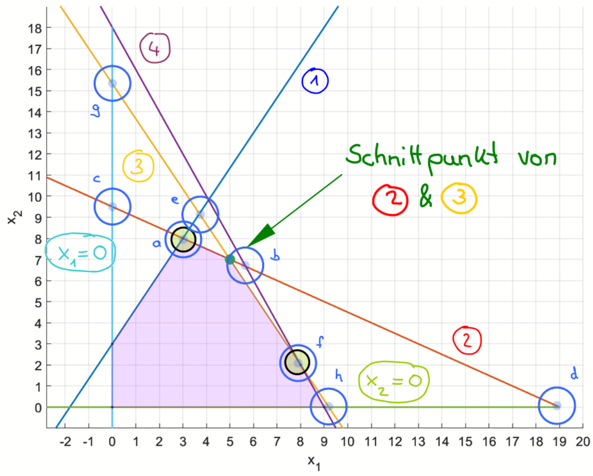
Spezifischere Beschreibung der Idee :

1.) Verbal : ▶ 12

Ausgehend von einer bekannten Ecke von $\mathcal{M}$, die der Schnittpunkt von n Hyperebenen (im $\mathbb{R}^n$) ist, suche man benachbarte Ecken.

benachbarte Schnittpunkte von n Hyperebenen, die alle NBen und Nichtnegativitätsforderungen erfüllen

Schnittpunkte von jeweils n Hyperebenen, bei denen jeweils eine Hyperebene aus der Ausgangssituation durch eine andere Hyperebene ausgetauscht wird



● „Referenz": 2 & 3

benachbarte Schnittpunkte

a	2 & 1				1 & 3	e
b	2 & 4				4 & 3	f
c	2 & $x_1 = 0$				$x_1 = 0$ & 3	g
d	2 & $x_2 = 0$				$x_2 = 0$ & 3	h

benachbarte Ecken

2.) formal / mathematisch

▶ 13

basierend auf den Feststellungen:

I.) $A\vec{x} = \vec{b}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$) aus (LP_N) ensteht aus $A\vec{x} \leq \vec{b}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$) aus (LP_S) durch Einführung von m Schlupfvariablen $x_{S,1}, \dots, x_{S,m}$ so, dass

$$\vec{x} = (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\hat{=}\ \text{Strukturvariablen } x_1,\dots,x_n \text{ von } (LP_S) = \vec{x} \in \mathbb{R}^n}, \overbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}}^{\hat{=}\ \text{Schlupfvariablen } x_{S,1},\dots,x_{S,m}})^T$$

II) Es ist $\vec{x} \in \mathcal{M}$ (d.h. $A\vec{x} \leq \vec{b} \wedge \vec{x} \geq \vec{0}$) $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{b} \wedge \vec{x} \geq \vec{0}$

III) Es ist $x_j = 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n+m\}$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $A\vec{x} = \vec{b}$, genau dann, wenn das zugehörige $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ in einer der durch $A\vec{x} \leq \vec{b} \wedge \vec{x} \geq \vec{0}$ induzierten Hyperebenen liegt.

genauer: $$x_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = 0, \text{ falls } j \in \{1,\dots,n\} & \boxed{\text{d.h. } \vec{x} \in G_{m+j}} \\ a_{\mu 1} x_1 + \dots + a_{\mu n} x_n = b_\mu & \boxed{\text{d.h. } \vec{x} \in G_\mu} \\ \text{mit } \mu = j-n, \text{ falls } j \in \{n+1,\dots,m\} & \end{cases}$$

IV) Mindesten n Komponenten jeder Basislösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ sind Null. D.h. jede Basislösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ korrespondiert mit dem Schnittpunkt von n Hyperebenen aus $\{G_1, \dots, G_{m+n}\}$

V) Zu jeder Basislösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ gibt es eine Darstellung des LGS in kanonischer Normalform mit $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

VI) Eine Basislösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist nicht-negativ genau dann, wenn in der zugehörigen kanonischen Normalform des LGS $\vec{b}$ nicht negativ ist.

VII.) Unterschiedliche kanonische Normalformen von $A\vec{x} = \vec{b}$ sind äquivalent, d.h. eine kanonische Normalform kann mittels Elementarer Zeilenumformungen in eine andere kanonische Normalform überführt werden.

ergibt sich die Strategie zur Auffindung einer benachbarten Ecke von $\mathcal{M}$. ▶ 14

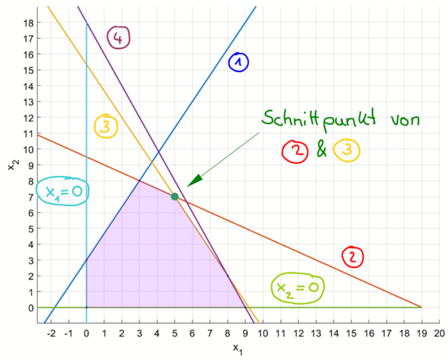
- Ausgangspunkt:

kanonische Normalform von $A\vec{x} = \vec{b}$ passend zur bekannten Ecke von $\mathcal{M}$ mit

- $\vec{b} \geq \vec{0}$
- Basisindizes $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, so dass $\vec{a}_{\beta_1} = \vec{e}_1, \dots, \vec{a}_{\beta_m} = \vec{e}_m$
- Nichtbasisindizes $\mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$, so dass $\vec{w}_{\nu_1} = \dots = \vec{w}_{\nu_n} = 0$ in der zugehörenden Basislösung $\vec{w}$

▶ 15 Beispiel:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -30/7 & 13/7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & -3/7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & -1/7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -3/7 & 2/7 & 0 & 5 \end{array}\right)$$



entstanden durch EZUs aus

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 19 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 46 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

mit $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = 2$, $\beta_4 = 1$ als Basisindizes

$\nu_1 = 4$ $\nu_2 = 5$ als Nicht-Basisindizes

und der zugehörigen Basislösung:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

← Strukturvariablen $x_1 = 5$, $x_2 = 7$

← Schlupfvariablen

← NB 2 & 3 vollständig ausgenutzt $\Rightarrow$ $\binom{5}{7} \,\hat{=}\,$ Schnittpunkt von 2 & 3

▶ 16 Orientierungshilfe im vorliegenden Beispiel (nur für Verständniszwecke)

→ Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^6$ mit $A\vec{x} = \vec{b}$ dann ist

- $x_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ zu finden auf $x_1 = 0$
- $x_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ zu finden auf $x_2 = 0$
- $x_3 = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ zu finden auf 1
- $x_4 = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ zu finden auf 2
- $x_5 = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ zu finden auf 3
- $x_6 = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ zu finden auf 4

→ $\nu \in \mathcal{N} \Rightarrow x_\nu = 0$

17 Tausch eines Nichtbasisindex (hier z.B. $v_2 = 5$) mit einem Basisindex

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & & & \text{behalten} & \text{austauschen} & & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 1 & -30/7 & 13/7 & 0 & 13 \\
0 & 0 & 0 & 1/7 & -3/7 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 5/7 & -1/7 & 0 & 7 \\
1 & 0 & 0 & -3/7 & 2/7 & 0 & 5
\end{array}\right) \quad \text{mit } \mathcal{B} = \{3,6,2,1\} \;\&\; \mathcal{N} = \{4,5\}
$$

Variante 1: $\mathcal{B} = \{3,6,2,1\}$ & $\mathcal{N} = \{4,5\}$

EZUs $\sim$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
-13/2 & 0 & 1 & -3/2 & 0 & 0 & -39/2 \\
3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 17/2 \\
1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 19/2 \\
7/2 & 0 & 0 & -3/2 & 1 & 0 & 35/2
\end{array}\right)
$$

$\not\geq \vec{0}$ somit: korrespondiert nicht mit Ecke

mit $\mathcal{B} = \{3,6,2,5\}$ & $\mathcal{N} = \{4,1\}$

Variante 2: $\mathcal{B} = \{3,6,2,1\}$ & $\mathcal{N} = \{4,5\}$

EZUs $\sim$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & 13 & 1 & 5 & 0 & 0 & 104 \\
0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 & -20 \\
0 & -7 & 0 & -5 & 1 & 0 & -49 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 19
\end{array}\right)
$$

$\not\geq \vec{0}$ somit: korrespondiert nicht mit Ecke

mit $\mathcal{B} = \{3,6,5,1\}$ & $\mathcal{N} = \{4,2\}$

Variante 3: $\mathcal{B} = \{3,6,2,1\}$ & $\mathcal{N} = \{4,5\}$

EZUs $\sim$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 7/13 & -30/13 & 1 & 0 & 7 \\
0 & 0 & 3/13 & -11/13 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 1 & 1/13 & 5/13 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 0 & -2/13 & 3/13 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)
$$

$\geq \vec{0}$ somit: korrespondiert mit Ecke: $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

mit $\mathcal{B} = \{5,6,2,1\}$ & $\mathcal{N} = \{4,3\}$

Variante 4: $\mathcal{B} = \{3,6,2,1\}$ & $\mathcal{N} = \{4,5\}$

EZUs $\sim$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 1 & -11/3 & 0 & 13/3 & 52/3 \\
0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & -7/3 & -7/3 \\
0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 20/3 \\
1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 & 17/3
\end{array}\right)
$$

$\not\geq \vec{0}$ somit: korrespondiert nicht mit Ecke

mit $\mathcal{B} = \{3,5,2,1\}$ & $\mathcal{N} = \{4,6\}$

- <u>Ziel</u>: äquivalente kanonische Normalform $\tilde{A} \cdot \vec{x} = \tilde{\vec{b}}$ mit

  d.h. $(A \mid \vec{b}) \overset{\text{EZUS}}{\sim} (\tilde{A} \mid \tilde{\vec{b}})$

▶ 18

- $\tilde{\vec{b}} \geq \vec{0}$
- Basis- & Nichtbasisindizes $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_m\}$ und $\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n\}$

  so, dass sich $\mathcal{B}$ von $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{N}$ von $\tilde{\mathcal{N}}$ in nur jeweils <u>genau einem</u> Element unterscheiden

d.h. $\exists!\, i \in \{1, \dots, m\} \wedge \exists!\, \ell \in \{1, \dots, n\}$:

$$\tilde{\beta}_i = \nu_\ell \wedge \tilde{\nu}_\ell = \beta_i \wedge \tilde{\beta}_j = \beta_j \;\; \forall j \neq i \wedge \tilde{\nu}_k = \nu_k \;\; \forall k \neq \ell$$

d.h. $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}}$ entstehen aus $\mathcal{B}, \mathcal{N}$ durch Tausch eines Elements von $\mathcal{B}$ mit einem Element von $\mathcal{N}$.

$$\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m\} \;\; \& \;\; \mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_{\ell-1}, \nu_\ell, \nu_{\ell+1}, \dots, \nu_n\}$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \nu_\ell, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m\} \;\; \& \;\; \tilde{\mathcal{N}} = \{\nu_1, \dots, \nu_{\ell-1}, \beta_i, \nu_{\ell+1}, \dots, \nu_n\}$$

dann korrespondiert die zugehörige Basislösung $\tilde{\vec{w}}$ mit einer benachbarten Ecke von $\mathcal{M}$.

▶ 19 ? es bleiben die Fragen:

1.) Welcher Nicht-Basis-Index soll zu einem Basis-Index werden?

2.) Welcher Basis-Index soll zu einem Nicht-Basis-Index werden?

▶ 20 zunächst zu 2.) <u>Wahl eines Basis-Index</u> bei bereits ausgewähltem Nicht-Basis-Index

d.h. $\nu_\ell \in \mathcal{N}$ ist bereits festgelegt, gesucht ist noch β_i

beispielhafte Betrachtung: mit $\mathcal{B} = \{3, 6, 2, 1\}$ & $\mathcal{N} = \{4, 5\}$

austauschen

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -30/7 & 13/7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & -3/7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & -1/7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -3/7 & 2/7 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \cancel{\mid \cdot (-7/3)} \quad \cancel{\mid \cdot (-7)} \quad 3/13 \;\; 1/13 \;\; -2/13 \;\; \mid \cdot \tfrac{7}{13} \quad \cancel{1/2 \;\; 3/2 \;\; -13/2 \;\; \mid \cdot \tfrac{7}{2}}$$

wird (je nach Wahl) durch EZUS zu

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \cancel{\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ oder } \cancel{\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ oder } \cancel{\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- Szenario $5 = \tilde{\beta}_2$ nicht möglich, da sich wegen $a_{25} < 0$ ein $\vec{\tilde{b}} \not\geq \vec{0}$ ergeben würde
- Szenario $5 = \tilde{\beta}_3$ nicht möglich, da sich wegen $a_{35} < 0$ ein $\vec{\tilde{b}} \not\geq \vec{0}$ ergeben würde
- Szenario $5 = \tilde{\beta}_1$ möglich, da nach den EZUen das System $\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 7/13 & -30/13 & \boxed{1} & 0 & \boxed{7} \\ 0 & 0 & 3/13 & -11/13 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/13 & 5/13 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -2/13 & 3/13 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ mit $\vec{\tilde{b}} \geq \vec{0}$ entsteht
  (somit $\tilde{\mathcal{B}} = \{5, 6, 2, 1\}$ & $\tilde{\mathcal{N}} = \{4, 3\}$)
- Szenario $5 = \tilde{\beta}_4$ nicht möglich, da nach den EZUen das System $\left(\begin{array}{cccccc|c} -13/2 & 0 & 1 & -3/2 & \boxed{0} & 0 & \boxed{-39/2} \\ 3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 17/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 19/2 \\ 7/2 & 0 & 0 & -3/2 & 1 & 0 & 35/2 \end{array}\right)$ mit $\vec{\tilde{b}} \not\geq \vec{0}$ entsteht

$\not\geq \vec{0}$

allgemein lässt sich zunächst festhalten: ▶ 21

Ist $v_e \in \mathcal{N}$ gewählt, so kann die entsprechende Spalte von $(A|\vec{b})$ nur dann in den Standardeinheitsvektor $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^m$ transformiert werden, d.h. so, dass dadurch $\vec{\tilde{b}} \geq \vec{0}$ im entstehenden LGS gilt, wenn:

- $a_{i,v_e} > 0$ (sonst würde aus $b_i > 0$ der Wert $\tilde{b}_i = \dfrac{b_i}{a_{i,v_e}} < 0$)
- $b_j - \dfrac{a_{j,v_e}}{a_{i,v_e}} \cdot b_i > 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$

die Addition des $-\dfrac{a_{j,v_e}}{a_{i,v_e}}$-fachen der i-ten zur j-ten Zeile erzeugt die Nullen in der v_e-ten Spalte

geeignet zur Überprüfung, ob der Austausch von v_e mit β_i geeignet ist

Wunsch: konstruktive Vorschrift zur Bestimmung der gegen v_e auszutauschenden Basisvariable β_i ▶ 22

$$\left(a_{i,v_e} > 0\right) \wedge \left(b_j - \frac{a_{j,v_e}}{a_{i,v_e}} \cdot b_i > 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{j,v_e}}{a_{i,v_e}} \cdot b_i < b_j \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{a_{j,v_e}} \quad (\text{es ist } a_{j,v_e} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_i}{a_{i,v_e}} \begin{cases} < \dfrac{b_j}{a_{j,v_e}} & \text{falls } a_{j,v_e} > 0 \\ \boxed{> \dfrac{b_j}{a_{j,v_e}} \quad \text{falls } a_{j,v_e} < 0} \end{cases} \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$$

irrelevant, denn mit $b_i, b_j, a_{i,v_e} > 0$ & $a_{j,v_e} < 0$ ist $\dfrac{b_i}{a_{i,v_e}} > 0$ & $\dfrac{b_j}{a_{j,v_e}} < 0$ somit $\dfrac{b_i}{a_{i,v_e}} > \dfrac{b_j}{a_{j,v_e}}$

somit wird gefordert:

$$\left(a_{i,\nu_e} > 0\right) \wedge \left(\frac{b_i}{a_{i,\nu_e}} < \frac{b_j}{a_{j,\nu_e}} \quad \forall\ j \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i\} \text{ mit } a_{j,\nu_e} > 0\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & a_{1,\nu_e} & \cdots & & & b_1 \\ \cdots & a_{2,\nu_e} & \cdots & & & b_2 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ \cdots & a_{m,\nu_e} & \cdots & & & b_m \end{array}\right) \begin{array}{l} \to b_1/a_{1,\nu_e} \\ \to b_2/a_{2,\nu_e} \\ \\ \to b_m/a_{m,\nu_e} \end{array} \Bigg\}$$

Zeile mit kleinstem Quotienten (> 0) erfüllt die Bedingung

Man erhält somit die zu ν_e passende Wahl von β_i durch:

$$\boxed{i = \text{Zeile in der gilt: } \frac{b_i}{a_{i,\nu_e}} = \min\left\{\frac{b_j}{a_{j,\nu_e}} \text{ für } j \in \{1,\dots,m\} \text{ mit } a_{j,\nu_e} > 0\right\}}$$

wird $\min\left\{\frac{b_j}{a_{j,\nu_e}}\right\}$ in mehreren Zeilen angenommen, dann wähle man als i eine dieser Zeilennummern

▶ 23 Beispiel:

mit $\mathcal{B} = \{3,6,2,1\}$ & $\mathcal{N} = \{4,5\}$

i.) $\nu_2 = 5$ soll Basisvariable werden

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -30/7 & 13/7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & -3/7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & -1/7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -3/7 & 2/7 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Quotienten

$13/\frac{13}{7} = 13 \cdot \frac{7}{13} = 7$ ← kleinster Quotientenwert

— $(a_{25} < 0)$

— $(a_{35} < 0)$

$5/\frac{2}{7} = 5 \cdot \frac{7}{2} = \frac{5}{2} \cdot 7$

somit ist $i = 1$, d.h. $\beta_1 = 3$ der Tauschpartner für $\nu_2 = 5$

es ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 7/13 & -30/13 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3/13 & -11/13 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/13 & 5/13 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -2/13 & 3/13 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

nach entsprechender Umformung mit $\tilde{\mathcal{B}} = \{5,6,2,1\}$, $\tilde{\mathcal{N}} = \{4,3\}$

ii.) $\boxed{v_1 = 4}$ soll Basisvariable werden

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -30/7 & 13/7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & -3/7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & -1/7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -3/7 & 2/7 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Quotienten

— $(a_{14} < 0)$

$1/\frac{1}{7} = 1 \cdot 7 = 7$ ← kleinster Quotientenwert

$7/\frac{5}{7} = 7 \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{5}$

— $(a_{44} < 0)$

Somit ist $i = 2$, d.h. $\beta_2 = 6$ der Tauschpartner für $\nu_1 = 4$

es ergibt sich
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 30 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$$
nach entsprechender Umformung

mit $\tilde{\mathcal{B}} = \{3, 4, 2, 1\}$, $\tilde{\mathcal{N}} = \{6, 5\}$

bleibt noch die Beantwortung von 1.) Welcher Nicht-Basis-Index soll zu einem Basis-Index werden?

▶ 24

d.h. gesucht ist $\nu_e \in \mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$

Vorbemerkungen

▶ 25

1.) Aufgabe: Bestimmung der optimalen Lösung(en) $\vec{x}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ ← Erinnerung

und des maximalen Zielfunktionswertes F_{max} von

$$(LP_s) \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & A\vec{x} \le \vec{b} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

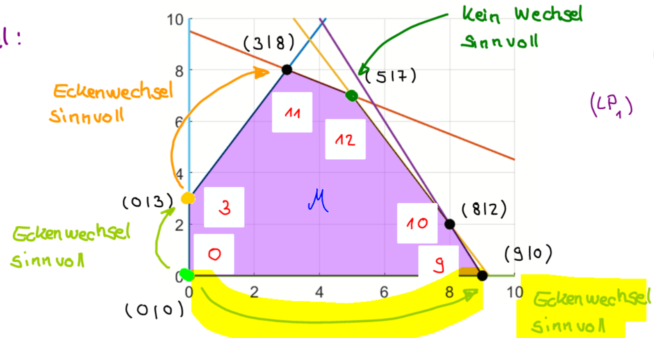
$\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^n$

$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$

▶ 26

2.) Ein Eckenwechsel ist nur interessant, wenn sich dadurch eine Erhöhung des Zielfunktionswertes erzielen lässt.

Beispiel:



(zu bevorzugen)

$$(LP_1) \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^T \cdot \vec{x} \\ \text{u.d.N.} & \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

⚠ nur in Ecken muss man nach optimalen Lösungen suchen, denn

▶ 27

5.) **Besitzt (LP_S) eine optimale Lösung, dann ist mindestens eine Ecke von $\mathcal{M}$ eine optimale Lösung.**

1.) Die Menge $\mathcal{M} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} \leq \vec{b} \wedge \vec{x} \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^n \}$ der zulässigen Lösungen ist konvex

2.) $\mathcal{M}$ ist der Durchschnitt von $n+m$ Halbräumen.

3.) Ist $\mathcal{M}$ beschränkt, so ist $\mathcal{M}$ die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten des $\mathbb{R}^n$

4.) Ist $\mathcal{M}$ beschränkt, so sind die Ecken von $\mathcal{M}$ diejenigen Schnittpunkte von mindestens n Hyperebenen, die alle Nebenbedingungen und alle Nichtnegativitätsbedingungen des LP_S erfüllen.

▶ 28

Nachweis (spezieller Fall)

Voraussetzungen: (LP_S) besitzt eine optimale Lösung und $\mathcal{M}$ ist beschränkt.

Rahmenbedingungen: $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_q \in \mathbb{R}^n$ seien die Ecken von $\mathcal{M}$

Überlegungen:

- es sei $\vec{y}_k$ die Ecke mit dem maximalen Zielfunktionswert aller Ecken, d.h.

$$\exists k \in \{1, \dots, q\} : \quad F(\vec{y}_k) = \max \{ F(\vec{y}_1), \dots, F(\vec{y}_q) \}$$

- für beliebiges $\vec{x} \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_q \in [0,1] \text{ mit } \sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1 \text{ so, dass } \vec{x} = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \vec{y}_j$$

- somit ist $F(\vec{x}) = F\left(\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \vec{y}_j\right) = \vec{c}^T \left(\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \vec{y}_j\right)$

$$= \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \underbrace{\boxed{\vec{c}^T \cdot \vec{y}_j}}_{= F(\vec{y}_j)} = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \underbrace{\boxed{F(\vec{y}_j)}}_{\leq F(\vec{y}_k)}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{q} \left(\lambda_j \cdot F(\vec{y}_k)\right) = \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{q} \lambda_j}_{=1}\Big) \cdot F(\vec{y}_k) = F(\vec{y}_k)$$

insgesamt: $F(\vec{x}) \leq F(\vec{y}_k) \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{M}$

d.h. $F(\vec{y}_k) = \max \{ F(\vec{y}_1), \dots, F(\vec{y}_q) \} = \max \{ F(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathcal{M} \}$

d.h. $F_{max} = F(\vec{y}_k)$ und $\vec{y}_k$ ist eine optimale Lösung von (LP_S)

#

▶ 29 6.) Die Menge $X_{opt} := \{ \vec{x} \in \mathcal{M} \mid F(\vec{x}) = F_{max} \}$ der optimalen Lösungen von (LP_S) ist konvex

Nachweis: Übung

und: X_{opt} ist die konvexe Hülle der Ecken von $\mathcal{M}$ die selbst optimale Lösungen sind

▶ 30 Zwischenfazit: Nicht nur die Ecken von $\mathcal{M}$ können optimale Lösungen sein, aber manche Ecken sind optimale Lösungen

⚠

Zurück zu 1.) Welcher Nicht-Basis-Index soll zu einem Basis-Index werden?

Ist eine benachbarte Ecke „besser" und wenn „ja" welche? ▶ 31

- Ausgangspunkt: ▶ 32

  kanonische Normalform von $A\vec{x} = \vec{b}$ passend zur bekannten Ecke von $\mathcal{M}$ mit
  - $\vec{b} \geq \vec{0}$
  - Basisindizes $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, so dass $\vec{a}_{\beta_1} = \vec{e}_1, \dots, \vec{a}_{\beta_m} = \vec{e}_m$
  - Nichtbasisindizes $\mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$, so dass $\vec{w}_{\nu_1} = \dots = \vec{w}_{\nu_n} = 0$ in der zugehörenden Basislösung $\vec{w}$
  - bekannter Zielfunktionswert $F_w := F(\underbrace{(w_1, \dots, w_n)^T}_{\text{bekannte Ecke } \vec{y} \text{ von } \mathcal{M}}) = F(\vec{y}) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$

Beobachtungen: ▶ 33

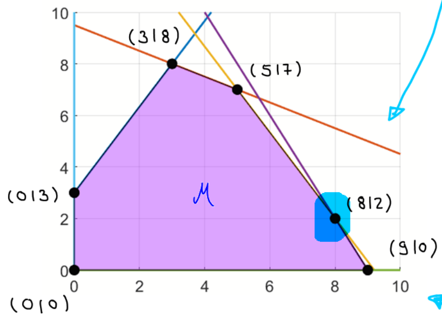
Es ist $A\vec{x} = \vec{b}$ $\left(A \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m \right)$ für $\vec{x} = \vec{w} + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \cdot \vec{u}_\ell \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

Beispiel: ▶ 34

Kanonische Normalform mit $\mathcal{B} = \{3,4,2,1\}$, $\mathcal{N} = \{5,6\}$ zu Ecke $(8,2)$

aus

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 30 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{array} \right)$$



$$(LP_1) \begin{cases} \text{maximiere } F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \vec{x} \\ \text{u.d.N. } \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \le \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 46 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

folgt:

Basisvariablen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \boxed{x_5} \\ \boxed{x_6} \end{pmatrix} = \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 43 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{w}} + \boxed{\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 11 \\ 3 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{\alpha_2} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -30 \\ -7 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{S,1} \\ x_{S,2} \\ x_{S,3} \\ x_{S,4} \end{pmatrix}$$

Nichtbasisvariablen

In $\vec{x}$ ist somit der Strukturvariablenanteil $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ von (LP_1) enthalten.

↳ Lösung, falls α_1, α_2 so, dass $x_{S,i} \ge 0 \;\forall i = 1, \dots, 4$

↳ zulässige Lösung, falls α_1, α_2 so, dass $x_{S,i} \ge 0 \;\forall i = 1, \dots, 4 \;\wedge\; x_1 \ge 0 \;\wedge\; x_2 \ge 0$

Es ergibt sich damit ein von α_1 & α_2 abhängiger Zielfunktionswert

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

↳ Zielfunktionswert an der bekannten Ecke $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$: F_w ← unabhängig von α_1, α_2

$$= (8+2) + \alpha_1 (1-2) + \alpha_2 (-3+5)$$

$$= \underbrace{10}_{=F_w} \underbrace{-\alpha_1}_{=x_5} + 2\underbrace{\alpha_2}_{=x_6}$$

unabhängig von α_1, α_2

anders ausgedrückt: $\boxed{F(\vec{x}) = \boxed{10} - 1 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6}$

Funktion der Nichtbasisvariablen bzgl $\mathcal{B} = \{3,4,2,1\}$, $\mathcal{N} = \{5,6\}$

↳ Zielfunktionswert an der bekannten Ecke

▶ 35 Verallgemeinerung:

Der Zielfunktionswert $F(\vec{x})$ eines LPs in Standardform

$$(LP_s)\quad \begin{cases} \text{maximiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^T\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases} \qquad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^m,\ \vec{c} \in \mathbb{R}^n \text{ für } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

lässt sich bzgl. jeder Ecke $\vec{y}$ des Zulässigkeitsbereiches $\mathcal{M}$ schreiben als

$$F(\vec{x}) = F(\vec{y}) + c_{\nu_1}x_{\nu_1} + c_{\nu_2}x_{\nu_2} + \ldots + c_{\nu_n}x_{\nu_n}$$

mit passenden reellen Werten $c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}$.

Hierbei sind, zu den gewählten Indexmengen $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ & $\mathcal{N} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$,

- $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_n}$ die Nichtbasisvariablen von $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ aus $A\vec{x} = \vec{b}$ (das aus $A\vec{x} \leq \vec{b}$ durch Einführung von Schlupfvariablen entsteht)
- $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ die Ecke, die sich aus der Basislösung $\vec{w} \in \mathbb{R}^{n+m}$ durch $\vec{y} = (w_1, \ldots, w_n)^T$ ergibt
- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ der Vektor, der sich aus $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ durch $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ergibt

▶ 36 Nachweis:

$$\vec{x} = \vec{w} + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \cdot \vec{u}_\ell \qquad (\text{zu } \mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \ \&\ \mathcal{N} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\})$$

$$F(\vec{x}) = \vec{c}^T \cdot \vec{x} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \ldots + 0x_{n+m}$$

$$= (c_1, c_2, \ldots, c_n, \underbrace{0, \ldots 0}_{m}) \cdot \vec{x}$$

$$= (\vec{c}^T, \vec{o}_m^T)\left(\vec{w} + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \cdot \vec{u}_\ell\right)$$

$$= (\vec{c}^T, \vec{o}_m^T)\, \vec{w} + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell (\vec{c}^T, \vec{o}_m^T)\, \vec{u}_\ell$$

$$= (c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, \ldots 0) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ w_{n+1} \\ \vdots \\ w_{n+m} \end{pmatrix} + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell (c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, \ldots 0) \cdot \begin{pmatrix} u_{\ell,1} \\ u_{\ell_2} \\ \vdots \\ u_{\ell,n} \\ u_{\ell,n+1} \\ \vdots \\ u_{\ell,n+m} \end{pmatrix}$$

$$= c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n \quad + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \left(c_1 u_{\ell,1} + c_2 \cdot u_{\ell,2} + \dots + c_n u_{\ell,n}\right)$$

$$= \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{y} + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{\tilde{u}}_\ell \qquad \text{mit} \quad \vec{\tilde{u}}_\ell = \begin{pmatrix} u_{\ell,1} \\ \vdots \\ u_{\ell,n} \end{pmatrix}$$

← die ersten n Komponenten von $\vec{u}_\ell$

Nebenüberlegung

$$= \boxed{\vec{c}^{\,T} \cdot \vec{y}} + \sum_{\ell=1}^{n} x_{\nu_\ell} \, \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{\tilde{u}}_\ell$$

$= F(\vec{y})$

Satz (allgemeine Lösung für ein LGS in kanonischer Normalform)

Gegeben sei ein LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ in kanonischer Normalform mit zugehörigen Indexmenge $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, so dass $\vec{a}_{\beta_k} = \vec{e}_k$ für $k = 1, \dots, m$.

Dann ist

i.) $\mathcal{B}$ eine Basismenge von A mit zugehöriger Nichtbasismenge $\mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_{p-m}\}$

ii.) Eine Basislösung $\vec{w} = (w_1, \dots, w_p)^T$ zu $\mathcal{B}$ aus i.) gegeben durch

- $w_{\beta_k} = b_k$ für $k = 1, \dots, m$
- $w_\nu = 0$ für $\nu \in \mathcal{N}$

iii.) die allgemeine Lösung des LGS gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \vec{w} + \sum_{l=1}^{p-m} \alpha_l \cdot \vec{u}_l \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{p-m} \in \mathbb{R} \right\}$$

mit

- der Basislösung $\vec{w}$ aus ii.) und
- $\vec{u}_l = (u_{l,1}, \dots, u_{l,p})^T$ für $l = 1, \dots, p-m$, definiert durch
  - $u_{l,\nu_l} = 1$,
  - $u_{l,\beta_k} = -a_{k,\nu_l}$ für $k = 1, \dots, m$
  - $u_{l,j} = 0$ für alle $j \in \mathcal{N} \setminus \{\nu_l\}$

Nebenüberlegung:

wegen $\vec{x} = \vec{w} + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \cdot \vec{u}_\ell$

(zu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ & $\mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$)

ist für $p = 1, \dots, n$:

p. Nichtbasisvariable

$$x_{\nu_p} = \underbrace{w_{\nu_p}}_{=0} + \alpha_1 \cdot \underbrace{u_{1,\nu_p}}_{=0} + \alpha_2 \cdot \underbrace{u_{2,\nu_p}}_{=0} + \dots + \alpha_p \cdot \underbrace{u_{p,\nu_p}}_{=1} + \dots + \alpha_n \underbrace{u_{n,\nu_p}}_{=0}$$

$$\Rightarrow x_{\nu_p} = \alpha_p \Rightarrow \alpha_p = x_{\nu_p}$$

Zusammengefasst:

$$F(\vec{x}) = F(\vec{y}) + \sum_{\ell=1}^{n} x_{\nu_\ell} \underbrace{\boxed{\vec{c}^{\,T} \vec{\tilde{u}}_\ell}}_{=: c_{\nu_\ell} \in \mathbb{R}}$$

$$= F(\vec{y}) + c_{\nu_1} \cdot x_{\nu_1} + c_{\nu_2} \cdot x_{\nu_2} + \dots + c_{\nu_n} \cdot x_{\nu_n}$$

Funktion von Nichtbasisvariablen

#

Beispiel ▶ 37

aus

Kanonische Normalform mit $\mathcal{B} = \{3,4,2,1\}$, $\mathcal{N} = \{5,6\}$ zu Ecke $(8,2)$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 30 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

ergibt sich

i.) bei Wahl von $\nu_1 = 5$ als auszuwechselndem Nichtbasisindex

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 30 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{Quotienten} \\ - \quad (a_{15} < 0) \\ - \quad (a_{25} < 0) \\ 2/2 = 1 \\ - \quad (a_{45} < 0) \end{array}$$

somit ist $i = 3$, d.h. $\beta_3 = 2$ der Tauschpartner für $\nu_1 = 5$

es ergibt sich nach entsprechender Umformung

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 11/2 & 1 & 0 & 0 & 5/2 & 54 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 10 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & -5/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 9 \end{array}\right) \quad \text{mit } \tilde{\mathcal{B}} = \{3,4,5,1\} \;\&\; \tilde{\mathcal{N}} = \{2,6\}$$

mit Basislösung $\vec{\tilde{w}} = \begin{pmatrix} \boxed{9} \\ \boxed{0} \\ 54 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zugehöriger Ecke $\vec{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

sowie

$F(\vec{\tilde{y}}) = 9 + 0 = 9$ ← direkt nach $F(\vec{\tilde{y}}) = (1,1) \cdot \vec{\tilde{y}}$

$= 10 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 9$ ← nach $F(\vec{x}) = 10 - 1 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6$

also $\boxed{F(\vec{\tilde{y}}) < F(\vec{y})}$ wegen $\tilde{w}_5 > 0$

vorhersehbar wegen

ii.) bei Wahl von $\nu_2 = 6$ als auszuwechselndem Nichtbasisindex

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & \boxed{30} & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{Quotienten} \\ 43/30 \\ 7/7 = 1 \leftarrow \text{kleinster Quotientenwert} \\ - \ (a_{36} < 0) \\ 8/3 \end{array}$$

somit ist $i = 2$, d.h. $\beta_2 = 4$ der Tauschpartner für $\nu_2 = 6$

es ergibt sich nach entsprechender Umformung

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -30/7 & 13/7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & -3/7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & -1/7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -3/7 & 2/7 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \text{mit } \tilde{\mathcal{B}} = \{3, 6, 2, 1\} \ \& \ \tilde{\mathcal{N}} = \{5, 4\}$$

mit Basislösung $\vec{\tilde{w}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zugehöriger Ecke $\vec{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

sowie

$$F(\vec{\tilde{y}}) = 5 + 7 = 12 \quad \leftarrow \text{direkt nach } F(\vec{\tilde{y}}) = (1,1) \cdot \vec{\tilde{y}}$$

$$= 10 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 12 \quad \leftarrow \text{nach } F(\vec{x}) = 10 - 1 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6$$

also $\boxed{F(\vec{\tilde{y}}) > F(\vec{y})}$ wegen $\tilde{w}_6 > 0$

vorhersehbar wegen

▶ 38 Beispielfazit: Wegen $F(\vec{x}) = 10 - 1 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6$ ist klar erkennbar, dass es nicht zielführend ist, 5 zum Basisindex zu machen, dass es aber günstig ist, 6 zum Basisindex zu machen

Zusammenhänge & Entscheidungsgrundlagen ▶ 39

Annahme: $F_{max} \in \mathbb{R}$ existiert

dann ist:

$$F_{max} = \max\{F(\vec{y}_1), F(\vec{y}_2), \ldots, F(\vec{y}_q)\}$$

Ecke von $\mathcal{M}$

Komponente 1 bis n von

nichtnegative Basislösung $\vec{w}$

von $A\vec{x} = \vec{b}$ zu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ & $\mathcal{N} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$

ablesbar aus

$A\vec{x} = \vec{b}$ in kanonischer Normalform mit $\vec{b} \geq \vec{0}$

zu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ & $\mathcal{N} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$

▶ 40 „Nachbarschaften"

benachbarte Ecken:

$\vec{y}$ mit $F(\vec{y})$

wechseln falls $F(\tilde{\vec{y}}) \geq F(\vec{y})$

$\boxed{\text{wechseln falls } c_{\nu_k} \geq 0}$

$\tilde{\vec{y}}$ mit $F(\tilde{\vec{y}}) = F(\vec{y}) + c_{\nu_k} \cdot \tilde{w}_{\nu_k}$

benachbarte Basislösungen:

$\vec{w}$ mit $\mathcal{N} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$

$\exists!\, \nu_k \in \mathcal{N} : \nu_k \notin \tilde{\mathcal{N}}$

$\tilde{\vec{w}}$ mit $\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_n\}$

Wahl von ν_k:

wegen: $F(\vec{x}) = F(\vec{y}) + c_{\nu_1} \cdot x_{\nu_1} + c_{\nu_2} \cdot x_{\nu_2} + \ldots + c_{\nu_n} \cdot x_{\nu_n}$

ν_k so, dass $c_{\nu_k} = \max\{c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_n}\}$

falls alle c_ν's < 0 : keine Verbesserung möglich

garantiert größtmöglichen Funktionswertzuwachs

„benachbarte" kanonische Normalformen

$(A \mid \vec{b})$ zu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ & $\mathcal{N} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$

EZU

$(\tilde{A} \mid \tilde{\vec{b}})$ zu $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_m\}$ & $\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_n\}$

$(\exists!\, \nu_k \in \mathcal{N} : \nu_k \notin \tilde{\mathcal{N}})$
$\wedge\ (\exists!\, \beta_i \in \mathcal{B} : \beta_i \notin \tilde{\mathcal{B}})$

garantiert $\tilde{\vec{b}} \geq \vec{0}$

Wahl von i (und somit β_i):

$i \in \{1, \ldots, m\}$ so, dass $\dfrac{b_i}{a_{i,\nu_k}} = \min\left\{ \dfrac{b_j}{a_{j,\nu_k}} \text{ für } j \in \{1, \ldots, m\} \text{ mit } a_{j,\nu_k} > 0 \right\}$

Berechnung der Werte $c_{\nu_1}, \dots, c_{\nu_n}$ ▶ 41

Ausgangspunkt: ▶ 42

$A\vec{x} = \vec{b}$ kanonische Normalform zu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ und $\mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ mit

- $\vec{b} \geq \vec{0}$
- Basislösung $\vec{w} \in \mathbb{R}^{n+m}$
- zugehöriger Ecke $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{y} = (w_1, \dots, w_n)^T$
- Zielfunktionswert $F_w := F(\vec{y})$ $\quad$ gesuchte Werte für gegebene Situation bekannt.
- Koeffizienten $c_{\nu_1}, \dots, c_{\nu_n}$ so, dass $F(\vec{x}) = F_w + \sum_{\ell=1}^{n} c_{\nu_\ell} \cdot x_{\nu_\ell}$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

Zielsetzung: ▶ 43

$\tilde{A}\vec{x} = \tilde{\vec{b}}$ „benachbarte" kanonische Normalform zu $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_m\}$ und $\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n\}$ mit

- $\tilde{\vec{b}} \geq \vec{0}$
- Basislösung $\tilde{\vec{w}} \in \mathbb{R}^{n+m}$
- zugehöriger Ecke $\tilde{\vec{y}} \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ soll möglichst „billig" bestimmt werden
- Zielfunktionswert $F_{\tilde{w}} := F(\tilde{\vec{y}})$
- Koeffizienten $\tilde{c}_{\tilde{\nu}_1}, \dots, \tilde{c}_{\tilde{\nu}_n}$ so, dass $F(\vec{x}) = F_{\tilde{w}} + \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{c}_{\tilde{\nu}_\ell} \cdot x_{\tilde{\nu}_\ell}$

„doppelte" Schlange, da sowohl die Koeffizienten werte als auch die Indizes neu sind

▶ 44

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

▶ 45 **Überlegungen:**

$$F(\vec{x}) = F_w + \sum_{\ell=1}^{n} c_{\nu_\ell} \cdot x_{\nu_\ell} = F_w + \sum_{\ell=1}^{n} c_{\nu_\ell} \cdot x_{\nu_\ell} + \sum_{k=1}^{m} 0 \cdot x_{\beta_k}$$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$= F_w + \vec{c}^{\,T} \vec{x} =: F(\vec{x}) \quad \longleftarrow F: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

mit $\vec{c} \in \mathbb{R}^{n+m}$: $\quad c_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \in \mathcal{B} \\ c_{\nu_\ell}, & \text{falls } j = \nu_\ell \in \mathcal{N} \end{cases}$

d.h. $\quad c_{\beta_1} = c_{\beta_2} = \dots = c_{\beta_m} = 0$

Damit ist

▶ 46 zur Äquivalenz der LPs

$$(LP_{\mathcal{B}})\begin{cases} \text{maximiere} \quad F(\vec{x}) = F_w + \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN.} \quad A\vec{x} = \vec{b} \\ \qquad\quad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

ein LP in kanonischer Normalform zu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

Ist $\vec{x}_{opt} \in \mathbb{R}^{n+m}$ eine optimale Lösung von $(LP_{\mathcal{B}})$ mit $F_{max} = F(\vec{x}_{opt})$

dann ist $\vec{x}_{opt} := (x_{opt,1}, \dots, x_{opt,n})^T \in \mathbb{R}^n$ eine optimale Lösung von (LP_s)

mit $F_{max} = F(\vec{x}_{opt}) = F_{max}$

Es ist $\boxed{\text{maximiere } F_w + \vec{c}^{\,T}\vec{x}}$ gleichbedeutend mit $\boxed{\text{maximiere } z \text{ für } z = F_w + \vec{c}^{\,T}\vec{x}}$ ▶ 47

und $\boxed{z = F_w + \vec{c}^{\,T}\vec{x}}$ ist gleichbedeutend zu $\boxed{-\vec{c}^{\,T}\vec{x} + z = F_w}$.

Daher ist ▶ 48

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad z \\ \text{udN.} \quad \boxed{\begin{array}{l} A\vec{x} = \vec{b} \\ -\vec{c}^{\,T}\vec{x} + z = F_w \end{array}} \\ \qquad\quad \vec{x} \geq \vec{0} \quad \text{(keine Nichtnegativitätsforderung für } z\text{)} \end{cases} \quad \text{gleichbedeutend mit} \quad \begin{cases} \text{maximiere} \quad F(\vec{x}) = F_w + \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN.} \quad A\vec{x} = \vec{b} \\ \qquad\quad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

Zusammenlegung zu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & \vec{0}_m \\ -\vec{c}^{\,T} & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(m+m)\times(n+m+1)}} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ F_w \end{pmatrix}$$

LGS in kanonischer Normalform ▶ 49

zu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m, n+m+1\}$ & $\mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$

- β_i-te Spalte $(\beta_i \in \mathcal{B})$: $\begin{pmatrix} \vec{a}_{\beta_i} \\ -c_{\beta_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\vec{e}_i}_{\in \mathbb{R}^m} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_i \in \mathbb{R}^{m+1}$ für $i = 1, \dots, m$

- $n+m+1$-te Spalte: $\begin{pmatrix} \vec{0}_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_{m+1} \in \mathbb{R}^{m+1}$

zum Nutzen der Erweiterung

▶ 50

EZUen verändern die Lösungsmenge eines LGS nicht

$(A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \tilde{A}\vec{x} = \vec{\tilde{b}})$

falls $(A \mid \vec{b}) \underset{\text{via EZUen}}{\sim} (\tilde{A} \mid \vec{\tilde{b}})$

Insbesondere gilt also

$$\begin{pmatrix} A & \vec{0}_m \\ -\vec{c}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ F_W \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{A} & \vec{0}_m \\ -\vec{\tilde{c}}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\tilde{b}} \\ \tilde{F}_W \end{pmatrix}$$

falls $T := \left(\begin{array}{cc|c} A & \vec{0}_m & \vec{b} \\ -\vec{c}^T & 1 & F_W \end{array}\right) \underset{\text{via EZUs}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{A} & \vec{0}_m & \vec{\tilde{b}} \\ -\vec{\tilde{c}}^T & 1 & \tilde{F}_W \end{array}\right) =: \tilde{T}$

bereits Spezialfall vorausgesetzt: EZUs so, dass $n+m+1$-te Spalte unverändert bleibt

▶ 51

▶ 52

EZUs mit dem Ziel:

$$T = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \cdots & \vec{a}_{\nu_k} & \cdots & \vec{e}_i & \cdots & \vec{0}_m & & \vec{b} \\ \cdots & -c_{\nu_k} & \cdots & 0 & \cdots & 1 & & F_W \end{array}\right) \longrightarrow \tilde{T} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \cdots & \vec{e}_i & \cdots & \vec{\tilde{a}}_{\tilde{\nu}_k} & \cdots & \vec{0}_m & & \vec{\tilde{b}} \\ \cdots & 0 & \cdots & -\tilde{c}_{\tilde{\nu}_k} & \cdots & 1 & & \tilde{F}_W \end{array}\right)$$

ν_k-te Spalte, β_i-te Spalte

$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^{m+1}$

$\tilde{\beta}_i$-te Spalte bzw. ν_k-te Spalte

$\tilde{\nu}_k$-te Spalte bzw. β_i-te

▶ 53

Durch die Zusammenfassung in T und die Transformation zu $\tilde{T}$ mittels EZUs wurde erreicht:

- benachbarte kanonische Normalform $\tilde{A}\cdot\vec{x} = \vec{\tilde{b}}$ zu $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_m\}$ & $\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n\}$ mit $\vec{\tilde{b}} \geq \vec{0}$ und zugehöriger Basislösung $\vec{\tilde{w}} \geq \vec{0}$ und Ecke $\vec{\tilde{y}}$
- Vektor $\vec{\tilde{c}} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{c}_{\tilde{\beta}_1} = \tilde{c}_{\tilde{\beta}_2} = \dots = \tilde{c}_{\tilde{\beta}_n} = 0$ und reeller Wert $\tilde{F}_W$

  mit $-\vec{\tilde{c}}^T\vec{x} + z = \tilde{F}_W$ für jede Lösung $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} \tilde{A} & \vec{0}_m \\ -\vec{\tilde{c}}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\tilde{b}} \\ \tilde{F}_W \end{pmatrix}$

▶ 54 Es ist $-\tilde{\vec{c}}^T \vec{x} + z = \tilde{F}_w$ für jede Lösung $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} \tilde{A} & \vec{o}_m \\ -\tilde{\vec{c}}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\vec{b}} \\ \tilde{F}_w \end{pmatrix}$

Somit $z = \tilde{F}_w + \tilde{\vec{c}}^T \vec{x} = F(\vec{x})$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

Insbesondere gilt somit

$$F(\tilde{\vec{y}}) = \tilde{F}_w + \tilde{\vec{c}}^T \tilde{\vec{w}}$$

ist eine Lösung von $\tilde{A}\vec{x} = \tilde{\vec{b}}$

Basislösung

$$= \tilde{F}_w + \tilde{c}_{\tilde{\nu}_1} \cdot \underbrace{\tilde{w}_{\tilde{\nu}_1}}_{=0} + \tilde{c}_{\tilde{\nu}_2} \cdot \underbrace{\tilde{w}_{\tilde{\nu}_2}}_{=0} + \dots + \tilde{c}_{\tilde{\nu}_n} \cdot \underbrace{\tilde{w}_{\tilde{\nu}_n}}_{=0}$$

$\tilde{c}_{\tilde{\beta}_i} = 0 \ \forall i$

$$= \tilde{F}_w$$

Somit also: $\tilde{F}_w = F(\tilde{\vec{y}}) =: F_{\tilde{w}}$

? Ziele erreicht ▶ 55

Zielsetzung:

$\tilde{A}\vec{x} = \tilde{\vec{b}}$ „benachbarte" kanonische Normalform zu $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_m\}$ und $\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n\}$ mit ✔

- ✔ $\tilde{\vec{b}} \geq \vec{o}$ ← durch Wahl von β_i wie beschrieben
- ✔ Basislösung $\tilde{\vec{w}} \in \mathbb{R}^{n+m}$
- ✔ zugehöriger Ecke $\tilde{\vec{y}} \in \mathbb{R}^n$ — soll möglichst „billig" bestimmt werden ✔
- Zielfunktionswert $F_{\tilde{w}} := F(\tilde{\vec{y}})$ ✔
- Koeffizienten $\tilde{c}_{\tilde{\nu}_1}, \dots, \tilde{c}_{\tilde{\nu}_n}$ so, dass $F(\vec{x}) = F_{\tilde{w}} + \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{c}_{\tilde{\nu}_\ell} \cdot x_{\tilde{\nu}_\ell}$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

durch Konstruktion von T und EZU-Transformation nach $\tilde{T}$

$$T := \begin{pmatrix} A & \vec{o}_m & \vec{b} \\ -\vec{c}^T & 1 & F_w \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{A} & \vec{o}_m & \tilde{\vec{b}} \\ -\tilde{\vec{c}}^T & 1 & F_{\tilde{w}} \end{pmatrix} =: \tilde{T}$$

← Primaler Simplex ▶ 57

Zusatzziel: $F(\tilde{\vec{y}}) \geq F(\vec{y})$ durch ▶ 56

- Wahl der Pivotspalte k: k so, dass $c_k = \max\{c_j > 0\}$
- Wahl der Pivotzeile i: i so, dass $\frac{b_i}{a_{i,k}} = \min\left\{\frac{b_j}{a_{j,k}} \text{ für } j \in \{1, \dots, m\} \text{ mit } a_{j,k} > 0\right\}$

Problem : Ausgangssituation muss vorliegen ▶ 58

$A\vec{x} = \vec{b}$ kanonische Normalform zu $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ und $\mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ mit

- $\vec{b} \geq \vec{0}$
- Basislösung $\vec{w} \in \mathbb{R}^{n+m}$ $\quad \vec{y} = (w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_n})^T$
- zugehöriger Ecke $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
- Zielfunktionswert $F_w := F(\vec{y})$
- Koeffizienten $c_{\nu_1}, \dots, c_{\nu_n}$ so, dass $F(\vec{x}) = F_w + \sum_{\ell=1}^{n} c_{\nu_\ell} \cdot x_{\nu_\ell}$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

Spezielle LPs in Standardform liefern einen direkten Einstiegspunkt ▶ 59

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{u.d.N.} \quad A\vec{x} \leq \vec{b} \\ \qquad\qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

bei gegebenem $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

mit $\vec{b} \geq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$

für Probleme dieser Art ist

- $\vec{y} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ eine Ecke
- $F_w = F(\vec{0}) = 0$ ein bekannter Funktionswert
- ein zugehöriges LP in kanonischer Form mit $\mathcal{B} = \{n+1, \dots, n+m\}$ & $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$

  gegeben durch das primal zulässige LP:

$$\begin{cases} \text{maximiere} \quad F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{u.d.N.} \quad A\vec{x} = \vec{b} \\ \qquad\qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad A = (A, E_m), \quad \vec{b} = \vec{b}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{0}_m \end{pmatrix}$$

▶ 60 im Video: Abschlußbemerkung