Das klassische Transportproblem

Ein besonderes lineares Optimierungsproblem

↑ spezielle Struktur

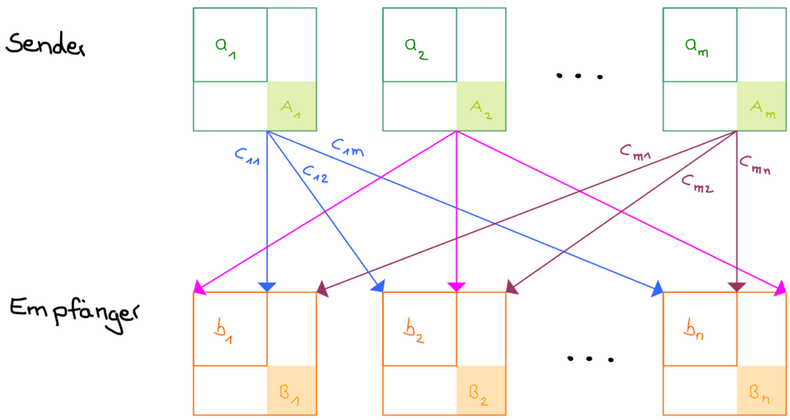
Problemstellung:

Ein bestimmtes Gut / Produkt ist an m unterschiedlichen Orten $A_1, \dots, A_m$ in unterschiedlichen Mengen $a_1, \dots, a_m$ vorrätig und wird an n unterschiedlichen Orten $B_1, \dots, B_n$ in unterschiedlichen Mengen $b_1, \dots, b_n$ benötigt.

Unter den Annahmen,

- dass die Gesamtnachfrage gleich dem Gesamtvorrat ist und,
- dass die Kosten des Transports vom Ort A_i zum Ort B_j $(i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\})$ proportional zur transportierten Menge sind, wobei der Transport einer Mengeneinheit mit c_{ij} Geldeinheiten zu Buche schlägt und,
- dass es keine Zwischentransporte (d.h. zwischen zwei Anbietern oder zwei Nachfragern) gibt,

ist ein kostenoptimaler Transportplan gesucht.



Quantitatives Modell:

1) Bezeichnungen

- Entscheidungsvariablen:

  x_{ij} ≙ von A_i nach B_j transportierte ME $\quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$

- Parameter

  a_i ≙ Vorrat an Lager A_i in ME $\quad \forall i \in \{1,\dots,m\}$

  b_j ≙ Bedarf an Zielort B_j in ME $\quad \forall j \in \{1,\dots,n\}$

  c_{ij} ≙ Transportkosten für eine ME von A_i nach B_j $\quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$

2.) prinzipielle Einschränkungen für die Entscheidungsvariablen ▶ 6

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \quad \widehat{=} \text{ Kein Transport von } B_j \text{ nach } A_i$$

3.) Zielfunktion ▶ 7

$$F(x_{11},\dots,x_{1n},\dots,x_{m1},\dots,x_{mn}) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \quad \widehat{=} \text{ Gesamttransportkosten}$$

4.) Optimierungsart : „minimiere" $\widehat{=}$ kostenoptimal ▶ 8

5.) Nebenbedingungen : ▶ 9

- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ $\widehat{=}$ Lager A_i wird komplett geräumt $\forall i \in \{1,\dots,m\}$
- $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ $\widehat{=}$ Bedarf an Ort B_j wird genau erfüllt $\forall j \in \{1,\dots,n\}$

alle Betrachtungen unterliegen der Problemrestriktion ← Keine Forderung an Entscheidung!

Gesamtangebot = Gesamtnachfrage: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ▶ 10

Damit ergibt sich das Optimierungsproblem in gleichungsbasierter Form:

minimiere $F(x_{11},\dots,x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}$ ← $m\cdot n$ Variablen ▶ 14

udN. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}$ ← m NBen

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}$ ← n NBen

m+n NBen

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$ ← Nichtnegativitätsbedingungen für alle Variablen

mit der Eigenschaft: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

es liegt offensichtlich ein lineares Programm vor.

Bemerkung: ▶ 11

Falls $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, dann gilt $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ oder $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$

1. Fall: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (Gesamtangebot größer als Gesamtnachfrage) ▶ 12

Restangebot: $b_{n+1} := \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) > 0$

↑ virtuelle Nachfrage am virtuellen Ort B_{n+1}

damit: $\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) + b_{n+1}}_{= \sum_{j=1}^{n+1} b_j} = \sum_{i=1}^{m} a_i$

Ausweg also:

- Erhöhung der Anzahl der Nachfrageorte um 1, wobei der zusätzliche virtuelle Ort B_{n+1}, das nimmt, was nicht nachgefragt wird.
- Definiere Kostenparameter $c_{1,n+1}, \dots, c_{m,n+1} > \max(c_{ij})$

2. Fall: $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$ (Gesamtnachfrage größer als Gesamtangebot) ▶ 13

fehlendes Angebot: $a_{m+1} := \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) > 0$

↑ Virtuelles Angebot von virtuellem Anbieter A_{m+1}

damit: $\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i + a_{m+1}}_{= \sum_{i=1}^{m+1} a_i} = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Ausweg also:

- Erhöhung der Anzahl der Anbieter um 1, wobei der zusätzliche virtuelle Anbieter A_{m+1} das anbietet, was zusätzlich nachgefragt wird.
- Definiere Kostenparameter $c_{m+1,1}, \dots, c_{m+1,n} > \max(c_{ij})$

Überführung in Matrix-Vektor-Notation: ▶ 15

$$\text{wegen}\quad F(x_{11},\dots,x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}$$

$$= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{11} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$

▶ 16 ist naheliegend, zu definieren:

- Vektor der Entscheidungsvariablen:

$$\vec{x} := (\underbrace{x_{11}, x_{12},\dots, x_{1n}}_{\text{Transporte von } A_1}, \underbrace{x_{21}, x_{22},\dots, x_{2n}}_{\text{Transporte von } A_2}, \dots, \underbrace{x_{m1}, x_{m2},\dots, x_{mn}}_{\text{Transporte von } A_m})^T \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$$

- Vektor der Zielfunktionskoeffizienten / Kostenkoeffizienten:

$$\vec{c} := (\underbrace{c_{11}, c_{12},\dots, c_{1n}}_{\text{Kosten ab } A_1}, \underbrace{c_{21}, c_{22},\dots, c_{2n}}_{\text{Kosten ab } A_2}, \dots, \underbrace{c_{m1}, c_{m2},\dots, c_{mn}}_{\text{Kosten ab } A_m})^T \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$$

denn damit ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} = \boxed{\vec{c}^{\,T}\cdot\vec{x}}$ ← vektorielle Form der Zielfunktion

Mit dem Vektor $\vec{x}\in\mathbb{R}^{m\cdot n}$ ergibt sich dann weiters: ▶ 17

- für $i = 1,\dots,m$: ▶ 18

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}$$

$$= \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{=\mathbb{1}_n^T}\cdot\begin{pmatrix} x_{i1}\\ x_{i2}\\ \vdots\\ x_{in}\end{pmatrix}$$

$$= \vec{0}_n^{\,T}\begin{pmatrix} x_{11}\\ \vdots\\ x_{1n}\end{pmatrix} + \dots + \mathbb{1}_n^T\begin{pmatrix} x_{i1}\\ \vdots\\ x_{in}\end{pmatrix} + \dots + \vec{0}_n^{\,T}\begin{pmatrix} x_{m1}\\ \vdots\\ x_{mn}\end{pmatrix}$$

$$= (\underbrace{\vec{0}_n^{\,T},\dots,\vec{0}_n^{\,T}}_{i-1 \text{ mal}}, \mathbb{1}_n^T, \underbrace{\vec{0}_n^{\,T},\dots,\vec{0}_n^{\,T}}_{m-i \text{ mal}})\cdot\vec{x}$$

und zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n^T & \vec{o}_n^{\,T} & & \vec{o}_n^{\,T} \\ \vec{o}_n^{\,T} & \mathbb{1}_n^T & & \\ & & \ddots & \vec{o}_n^{\,T} \\ \vec{o}_n^{\,T} & & \vec{o}_n^{\,T} & \mathbb{1}_n^T \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Matrix-Vektor-Form der „Lager-Ausräum"-NBen

▶ 19 im Video: Bemerkung und Zahlenbeispiel

- für $j = 1, \dots, n$: ▶ 20

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj}$$

insbesondere:

$$\begin{aligned} b_1 &= x_{11} + x_{21} + \dots + x_{i1} + \dots + x_{m1} \\ b_2 &= x_{12} + x_{22} + \dots + x_{i2} + \dots + x_{m2} \\ &\vdots \\ b_n &= x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{in} + \dots + x_{mn} \end{aligned}$$

somit also

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{matrix}}_{= E_n} \; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{matrix}}_{= E_n} \; \cdots \; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{matrix}}_{= E_n} \Bigg) \cdot \vec{x}$$

m-mal

bzw. $$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (E_n, E_n, \dots, E_n) \cdot \vec{x}$$

Matrix-Vektor-Notation der „Bedarf-Erfüllung"-NBen mit $\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ & $\vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

▶ 21

ergibt sich das Nebenbedingungs-System:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n^T & \vec{0}_n^T & \cdots & \vec{0}_n^T \\ \vec{0}_n^T & \mathbb{1}_n^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vec{0}_n^T \\ \vec{0}_n^T & \cdots & \vec{0}_n^T & \mathbb{1}_n^T \\ E_n & E_n & \cdots & E_n \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

mit $\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

bzw. $A\vec{x} = \vec{d}$ mit $A := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n^T & \vec{0}_n^T & \cdots & \vec{0}_n^T \\ \vec{0}_n^T & \mathbb{1}_n^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vec{0}_n^T \\ \vec{0}_n^T & \cdots & \vec{0}_n^T & \mathbb{1}_n^T \\ E_n & E_n & \cdots & E_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m \cdot n)}$ & $\vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$

Insgesamt erhält man das LP:

▶ 22

$$(TP) \begin{cases} \text{minimiere} \quad F(\vec{x}) = \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{udN.} \quad A\vec{x} = \vec{d} \\ \qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

← nicht in Standardform (wegen „minimiere" & „=")

← nicht in Normalform wegen „minimiere"

← nicht in Kanonischer Normalform wegen „minimiere" & da $A\vec{x} = \vec{d}$ nicht in Kanonischer Normalform

Prinzipiell möglich wäre: ▶ 23

▶ 24 Variante 1 : Überführung in LP in Standardform, dann Lösung mittels dualen & primalen Simplex

$$\begin{cases} \text{maximiere} & \tilde{F}(\vec{x}) = \tilde{\vec{c}}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN.} & \tilde{A}\vec{x} \le \tilde{\vec{d}} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

mit $\tilde{\vec{c}} = -\vec{c} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(m+n)\times(m\cdot n)}$

$\tilde{\vec{d}} = \begin{pmatrix} \vec{d} \\ -\vec{d} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(m+n)}$

Problem : Simplextableau wird sehr groß ($2(m+n)+1$ Zeilen, $m\cdot n + 2(m+n)+1$ Spalten)
zudem wird spezielle, evtl. vorteilhafte Struktur von A nicht ausgenutzt

ineffizient ! ▶ 26

▶ 25 Beispiel:

mit $\vec{a} := \begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ 7 \\ 26 \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} 37 \\ 11 \\ 27 \end{pmatrix}$, $\vec{c} := (2, 6, 6, 5, 9, 4, 6, 10, 4, 6, 9, 8)^T$

ergibt sich

$$(TP) \quad \begin{cases} \text{minimiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN.} & A\vec{x} = \vec{d} \\ & \vec{x} \ge \vec{0} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ 7 \\ 26 \\ 37 \\ 11 \\ 27 \end{pmatrix}$$

und damit das LP in Standardform:

$$\begin{cases} \text{maximiere} & \tilde{F}(\vec{x}) = \vec{\tilde{c}}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & \tilde{A}\vec{x} \leq \vec{\tilde{d}} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{maximiere} & \tilde{F}(\vec{x}) = \vec{\tilde{c}}^{\,T}\vec{x} \\ \text{u.d.N.} & \tilde{A}\vec{x} \leq \vec{\tilde{d}} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \vec{\tilde{c}} = -\vec{c} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(m+n) \times (m \cdot n)}, \quad \vec{\tilde{d}} = \begin{pmatrix} \vec{d} \\ -\vec{d} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(m+n)}$$

mit $\vec{\tilde{c}} = (-2, -6, -6, -5, -9, -4, -6, -10, -4, -6, -9, -8)^T$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix} \quad \& \quad \vec{\tilde{d}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ 7 \\ 26 \\ 37 \\ 11 \\ 27 \\ -10 \\ -32 \\ -7 \\ -26 \\ -37 \\ -11 \\ -27 \end{pmatrix}$$

woraus sich das initiale Tableau für den dualen Simplex wie folgt ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -26 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -37 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -11 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -27 \\
2 & 6 & 6 & 5 & 9 & 4 & 6 & 10 & 4 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \in \mathbb{R}^{15 \times 27}$$

Variante 2: Überführung in Normalform, dann Überführung in kanonische Normalform, dann Lösung mittels dualem & primalem Simplex ▶ 27

genauer: ▶ 28

$$(TP)\quad \begin{cases} \text{minimiere} & F(\vec{x}) = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN.} & A\vec{x} = \vec{d} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

1.) Überführung in Normalform ▶ 29

$$\begin{cases} \text{maximiere} & -\vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN.} & A\vec{x} = \vec{d} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

2.) Überführung in kanonische Normalform ▶ 30

prinzipielle Teilschritte:

i.) $(A \,|\, \vec{d}\,) \overset{EZU}{\sim} (\hat{A} \,|\, \hat{\vec{d}}\,)$ mit $\hat{\vec{a}}_{\beta_i} = \vec{e}_i$ für $i = 1, \ldots, q = \text{rang}(A)$

ii.) Überführung von $-\vec{c}^{\,T}\vec{x}$ zu $\hat{\vec{c}}^{\,T}\vec{x} + F^*$ so, dass $\hat{c}_{\beta_i} = 0 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, q\}$

iii) Bestimmung der zugehörigen Basislösung

Probleme:

- unbekannt: $q = \text{rang}(A)$
- Ausgangssituation $(A \,|\, \vec{d}\,)$ nicht in kanonischer Normalform, d.h. es müssen q l.u.a. Spalten von A gefunden werden und diese dann mittels EZUen in die Standardeinheitsvektoren überführt werden

ineffizient! ▶ 32

Beispiel: ausgehend von obigem Beispiel

erhält man, startend bei

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \vec{d} \\ \hline \vec{c}^{\,T} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 26 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 37 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 27 \\ \hline 2 & 6 & 6 & 5 & 9 & 4 & 6 & 10 & 4 & 6 & 9 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

wegen: $\left\{\begin{array}{l} \text{maximiere } z \\ \text{udN: } A\vec{x} = \vec{d} \\ \qquad \vec{c}^{\,T}\vec{x} + z = 0 \\ \qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{array}\right\} \begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{c}^{\,T} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{d} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} \text{maximiere } z \\ \text{udN. } \hat{A}\vec{x} = \hat{\vec{d}} \\ \qquad -\hat{\vec{c}}^{\,T}\vec{x} + z = F^* \\ \qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{array}\right.$

durch EZUs:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ & ⑨ & ⑩ & ⑪ & ⑫ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -28 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -6 & 0 & -1 & -2 & -530 \end{array}\right) \end{array}$$

Was bedeutet, dass $\left\{\begin{array}{l} \text{maximiere } -\vec{c}^{\,T}\vec{x} \\ \text{udN. } A\vec{x} = \vec{d} \\ \qquad \vec{x} \geq \vec{0} \end{array}\right.$ gleichbedeutend ist zu $\left\{\begin{array}{l} \text{maximiere } \hat{\vec{c}}^{\,T} \cdot \vec{x} + F^* \\ \text{udN. } \hat{A}\cdot\vec{x} = \hat{\vec{d}} \\ \qquad \vec{x} \geq 0 \end{array}\right.$

mit $F^* = -530$, $\hat{\vec{c}} = (0,0,0,0,0,5,0,0,6,0,1,2,2)^T$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\vec{d}} = \begin{pmatrix} -28 \\ 11 \\ 27 \\ 32 \\ 7 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es liegt somit ein LP in kanonischer Normalform vor mit

- den Basisindizes $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 7, 10\}$
- der zugehörigen Basislösung $\vec{x}_{\mathcal{B}} = (-28, 11, 27, 32, 0, 0, 7, 0, 0, 26, 0, 0)^T$

Zwischenfazit: klassisches Vorgehen prinzipiell möglich aber ineffizient. ▶ 33

daher wünschenswert: alternatives Vorgehen

daher: genauere Betrachtung der ...

Eigenschaften des Problems

1.) Zur Lösbarkeit: ▶ 34

mit $G := \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ist $\vec{x}$ mit $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{G}$ eine zulässige Lösung

d.h. $\mathcal{M} := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \mid A\vec{x} = \vec{d} \wedge \vec{x} \geq \vec{0} \} \neq \emptyset$

Da für jedes $\vec{x} \in \mathcal{M}$ gilt $x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$, ist $\mathcal{M}$ beschränkt

Da außerdem F stetig ist, existiert $\min_{\vec{x} \in \mathcal{M}} F(\vec{x})$.

D.h. (TP) ist lösbar.

2.) Zur optimalen Lösung: ▶ 35

Da (TP) eine optimale Lösung besitzt, ist mindestens eine Ecke von $\mathcal{M}$ eine optimale Lösung

eine Basislösung von $A\vec{x} = \vec{d}$ mit $\vec{x} \geq \vec{0} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$

3.) Zu den Basislösungen von $A\vec{x} = \vec{d}$ ▶ 36

Nachweis als Übungsaufgabe

Es ist $\boxed{\text{rang}(A) = m+n-1}$

somit:
- $\exists$ $m+n-1$ l.u.a. Spalten von $A \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m \cdot n)}$

  (Vorsicht: nicht jede Wahl von $m+n-1$ Spalten muss l.u.a sein und es kann mehr als eine Kombination von $m+n-1$ Spalten geben, die l.u.a. sind)

- höchstens $m+n-1$ Komponenten jeder Basislösung sind ungleich 0

- eine beliebige NB kann weggelassen werden

4.) zur Struktur der Matrix A ▶ 37

Es ist $A \in \{0,1\}^{(m+n)\times(m\cdot n)}$ ← die Einträge von A sind nur 0 oder 1

Somit :
- nur Additionen & Subtraktionen, keine Multiplikationen & Divisionen bei der Überführung von $(A\,|\,\vec{d})$ in kanonische Normalform nötig
- Basisvariablen von Basislösungen sind ganze Zahlen („$\in \mathbb{Z}$"), wenn $a_i, b_j \in \mathbb{N}$ $\forall i \in \{1,..,m\}$, $\forall j \in \{1,...,n\}$
- Transformationen von Simplex-Tableaus (nach Variante 1 oder 2) sehr „unspektakulär"

daher

Transporttableau zur Beschreibung von (TP) ▶ 38

Definition (gebräuchliche Spezifikation von Transportproblemen, Transportmatrix, Kostenmatrix)

Ein Transportproblem der Form ▶ 39

$$(\mathrm{TP})\quad \begin{cases} \text{minimiere} & F(x_{11},\dots,x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \\ \text{u.d.N} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall\, i \in \{1,\dots,m\} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall\, j \in \{1,\dots,n\} \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall\,(i,j) \in \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\} \end{cases}$$

wird für gewöhnlich spezifiziert durch die Angabe

- eines *Angebotsvektors* $\vec{a} = (a_i) \in \mathbb{R}^m$,
- eines *Nachfragevektors* $\vec{b} = (b_j) \in \mathbb{R}^n$ und
- einer *Kostenmatrix* $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{m2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Sender

Empfänger

mit $a_i, b_j, c_{ij} > 0$ und $\langle \mathbb{1}_m, \vec{a}\rangle = \langle \mathbb{1}_n, \vec{b}\rangle$.

Eine Lösung $\vec{x} = (x_{11},\dots,x_{mn})^T \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ wird üblicherweise angegeben in Form der zugehörigen *Transportmatrix* $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Transporte VON A_1

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Sender

Transporte NACH B_1

Empfänger

Bemerkung:

▶ 40 ⚠ $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij} \neq \underbrace{C\cdot X}$

↑ nicht definiert

Mit Hilfe der Transportmatrix lässt sich leicht überprüfen, ob ein Transportplan zulässig ist oder nicht:

Satz & Definition (zulässige Lösung, zulässige Transportmatrix) ▶ 41

Ein Transportplan $\vec{x} = (x_{11}, \dots, x_{mn})^T \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ zum Transportproblem (TP) mit Angebotsvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ und Nachfragevektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist eine zulässige Lösung, genau dann, wenn die zugehörige Transportmatrix $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

1.) X ist elementweise nicht-negativ, d. h. $X \geq 0$

2.) die Zeilensummen von X sind gleich den Komponenten des Angebotsvektors $\vec{a}$,

3.) die Spaltensummen von X sind gleich den Komponenten des Nachfragevektors $\vec{b}$.

Eine Matrix X die diese Eigenschaften erfüllt, nennt man *zulässige Transportmatrix*.

▶ 42

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeilensummen

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &\overset{!}{=} a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &\overset{!}{=} a_2 \\ &\vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &\overset{!}{=} a_m \end{aligned}$$

Spaltensummen

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} &\overset{!}{=} b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} &\overset{!}{=} b_2 \\ &\vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} &\overset{!}{=} b_n \end{aligned}$$

Beispiele ▶ 43

Gegeben sei ein Transportproblem mit $m = 4$ Anbietern $A_1, \dots, A_4$ und $n = 5$ Nachfragern $B_{1, \dots,} B_5$ durch:

- Angebotsvektor $\vec{a} = (30, 60, 20, 70)^T$
- Nachfragevektor $\vec{b} = (57, 10, 25, 45, 43)^T$
- Kostenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 12 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 9 \\ 3 & 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Zeilensummen} \\
\text{▶ 44} \quad \bullet \; X_1 := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 & 10 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 27 & 22 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 4 \\ 48 & 1 & 1 & 8 & 12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 20 \\ 70 \end{pmatrix} = \vec{a} \qquad \& \; X_1 \geq 0
\end{array}
$$

Spaltensummen: $(57 \quad 10 \quad 25 \quad 45 \quad 43) = \vec{b}^T$

eine zulässige Transportmatrix

Mit Gesamttransportkosten $F(\vec{x}_1) = 1070$

▶ 45 Anmerkung: 19 Einträge von X_1 sind von 0 verschieden

da $19 > 4+5-1 = 8$ stellt X_1 keine Basislösung dar

und daher ist X_1 (vermutlich) kein optimaler Transportplan

$$
\text{▶ 46} \quad \bullet \; X_2 = \begin{pmatrix} 44 & -4 & -4 & -2 & -4 \\ -9 & -1 & -6 & 41 & -35 \\ -7 & 9 & 22 & -2 & -2 \\ 29 & 6 & -13 & 8 & 14 \end{pmatrix} \ngeq 0
$$

Keine zulässige Transportmatrix

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Zeilensummen} \\
\text{▶ 47} \quad \bullet \; X_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 2 & 13 \\ 7 & 4 & 12 & 29 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 10 & 3 \\ 42 & 3 & 1 & 4 & 20 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 59 \\ 20 \\ 70 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 20 \\ 70 \end{pmatrix} = \vec{a}
\end{array}
$$

Spaltensummen $(57 \quad 9 \quad 25 \quad 45 \quad 43)$

$\neq (57 \quad 10 \quad 25 \quad 45 \quad 43) = \vec{b}^T$

Keine zulässige Transportmatrix

▶ 48 $\cdot \; X_4 = \begin{pmatrix} 0 & \overset{(2)}{10} & 0 & 0 & \overset{(5)}{20} \\ 0 & 0 & \overset{(8)}{25} & \overset{(9)}{12} & \overset{(10)}{23} \\ 0 & 0 & 0 & \overset{(14)}{20} & 0 \\ \overset{(16)}{57} & 0 & 0 & \overset{(19)}{13} & 0 \end{pmatrix}$ Zeilensummen $\begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 20 \\ 70 \end{pmatrix} = \vec{a}$ & $X_4 \geq 0$

Spaltensummen $(57 \quad 10 \quad 25 \quad 45 \quad 43) = \vec{b}^T$

ist eine zulässige Transportmatrix

Mit Gesamttransportkosten $F(\vec{x}_4) = 742$

▶ 49 Anmerkung: 8 Einträge von X_4 sind von 0 verschieden

diese entsprechen den Einträgen 2, 5, 8, 9, 10, 14, 16, 19 von $\vec{x}_4$

Da die Spalten 2, 5, 8, 9, 10, 14, 16, 19 von $A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_5^T & & & 0 \\ & \mathbb{1}_5^T & & \\ & & \mathbb{1}_5^T & \\ 0 & & & \mathbb{1}_5^T \\ E_5 & E_5 & E_5 & E_5 \end{pmatrix}$

l.u.a sind, ist $\vec{x}_4$ eine Basislösung.

hier gilt überdies: X_4 ist der optimale Transportplan.

▶ 50 Für Berechnungen im Zuge der Lösung eines TPs nutzt man für gewöhnlich die Zusammenstellung von Transportmatrix X, Angebotsvektor $\vec{a}$ & Nachfragevektor $\vec{b}$ im sog. Transporttableau

$$\begin{array}{c|c} X & \vec{a} \\ \hline \vec{b}^T & \end{array} \quad \widehat{=}$$

Empfänger

Sender

	1	2		n	
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2
	⋮	⋮		⋮	
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m
	b_1	b_2		b_n	

▶ 51 Für händische Berechnungen wird häufig ein Tableau genutzt, das auch die Transportkosten pro Mengeneinheit enthält:

Empfänger

Sender	1	2		n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

▶ 52 Das Transporttableau ist kein statisches Objekt, sondern ein „Arbeitsmittel", mit dem prinzipiell wie folgt gearbeitet wird:

▶ 53 • Start: „leeres" Tableau – Tableau ohne Plan

leere x_{ij}-Positionen werden mit dem Wert 0 assoziiert!

d.h. zugehörige Transportmatrix ist nicht zulässig!

Empfänger

Sender	1	2		n	
1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

▶ 54 • Eröffnungsverfahren: Schrittweise Konstruktion eines Tableaus, das eine zulässige Basislösung darstellt

Empfänger

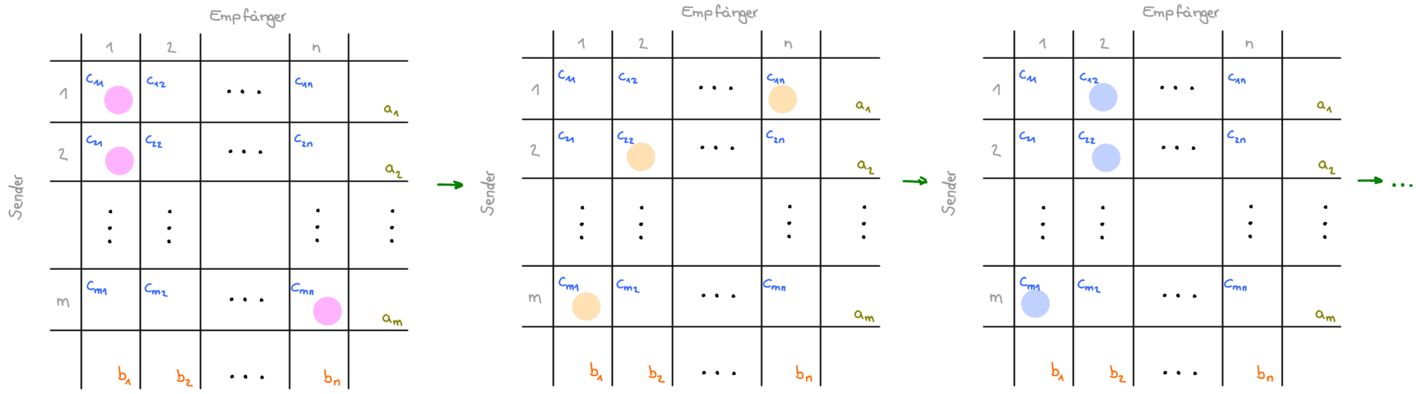
Sender	1	2		n	
1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Ziel: zulässige Transportmatrix mit bis zu $m+n-1$ „gesetzten" Feldern.

unterschiedliche Strategien / Techniken bekannt.

55

- Optimierungsphase : Manipulation des Transporttableaus unter Einhaltung der Zulässigkeit und der „Basiseigenschaft", bis optimaler Transportplan gefunden ist



unterschiedliche Strategien bekannt.