Fouriertransformation

Zielsetzung: Darstellung nicht-periodischer Funktionen als Überlagerung harmonischer Schwingungen

Erinnerung:

Fourierreihe: Darstellung periodischer Funktionen als Überlagerung harmonischer Schwingungen

Definition (Fourier-Reihe)

Es sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ eine vorgegebe Kreisfrequenz. ← $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T: Periode von f)

Dann versteht man unter einer *Fourierreihe* eine Überlagerung harmonischer Schwingungen mit den Kreis-Frequenzen $0 \cdot \omega,\ \omega,\ 2 \cdot \omega,\ 3 \cdot \omega,\ \ldots$.

Man unterscheidet

- *spektrale Fourierreihe:* $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(k\omega t + \varphi_k)$
  für gegebene Werte $A_0, A_1, \ldots \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in \mathbb{R}$
- *reelle Fourierreihe:* $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$
  für gegebene Werte $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$
- *komplexe Fourierreihe:* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t}$
  für gegebene Werte $\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$

Die Partialsummen der Fouriereihe bezeichnet man als *trigonometrische Polynome*.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jk\omega t}\, dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$c_{-k} = \overline{c_k}$$

Idee: „nicht periodische Funktion = periodische Funktion mit $T = \infty$"

Dr. rer. nat. M. Striebel

Definition (Fourier - Transformation, Fourier - Operator)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ eine gegebene Funktion.

▶ 2

Die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \omega \mapsto F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t$$

heißt *Fourier-Transformierte* der Funktion f falls das uneigentliche Integral existiert.

Man schreibt auch $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$, nennt $\mathcal{F}$ den *Fourier-Operator*, f die *Originalfunktion* und F die *Bildfunktion*.

Der Definitonsbereich der Originalfunktion heißt *Zeitbereich*, der Definitionsbereich der Fourier-Transformierten heißt *Frequenzbereich*.

Die Fourier-Transformation wird symbolisiert durch:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)$$

Aus $F = \mathcal{F}\{f\}$, wie oben beschrieben ergibt sich $f = \mathcal{F}^{-1}\{F\}$ aus

$$\mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, \mathrm{d}\omega = \begin{cases} f(t) & \text{falls } f \text{ in } t \text{ stetig} \\ \frac{f(t+)+f(t-)}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkungen:

i) Definition der Fourier-Transformierten ist nicht eindeutig

alternativ: $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$ & $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$

▶ 3

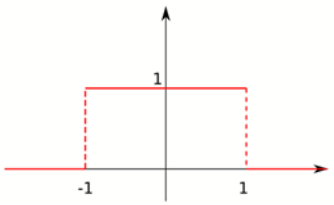
⚠ Vorsicht bei Verwendung von Tabellen o. ä.

ii) uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt$ sind falls nicht konvergent im Sinne des Cauchy-Hauptwertes zu verstehen: $CH \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} g(t)\, dt.$

▶ 4

Beispiele:

i.) Rechtecksimpuls



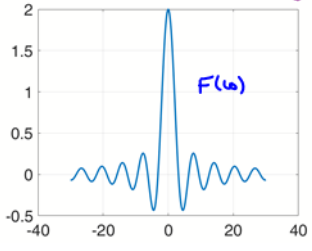
▶ 5

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & t \in [-1, 1) \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{-1}{j\cdot\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{j\cdot\omega} \left(e^{-j\cdot\omega} - e^{j\omega} \right)$$

$$= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{e^{j\cdot\omega} - e^{-j\cdot\omega}}{2\cdot j} = 2 \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega} = 2 \cdot \mathrm{sinc}(\omega) \in \mathbb{R}$$

[Erinnerung: $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$]



Dr. rer. nat. M. Striebel

ii) Konstante Funktion:

▶ 6

$f(t) = 1 \quad \forall t \quad (f \equiv 1)$

$$\cancel{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt \overset{CH}{=} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} e^{-j\omega t}\, dt = \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-c}^{c}$$

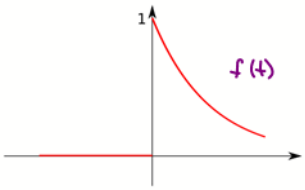
$$= \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{j\omega} \left(e^{-j\cdot\omega\cdot c} - e^{+j\omega c} \right)$$

- nicht definiert für $\omega = 0$
- nicht konvergent für $\omega \neq 0$

d.h. Konstante Funktionen besitzen keine Fouriertransformierte

iii) Einseitige Exponentialfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-a\cdot t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } a > 0 \text{ (konstant)}$$



▶ 7

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-a\cdot t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c} e^{-(a+j\omega)t}\, dt$$

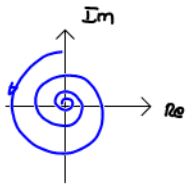
$$= \lim_{c\to\infty} \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{c} = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)c} + \frac{1}{a+j\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{a+j\omega} \left(1 - \lim_{c\to\infty} e^{-(a+j\omega)c} \right)$$

betrachte: $e^{-(a+j\omega)\cdot c}$ mit $a>0, \omega\in\mathbb{R}, c>0$

$e^{-(a+j\omega)\cdot c} = e^{-a\cdot c - j\cdot\omega\cdot c} = \underbrace{e^{-a\cdot c}}_{>0} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot c} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \cdot \left| e^{-(a+j\omega)\cdot c} \right| = e^{-a\cdot c}$



$\cdot \arg\left(e^{-(a+j\omega)\cdot c}\right) = -\omega\cdot c$

es gilt da $a>0, c>0 \quad -a\cdot c < 0$

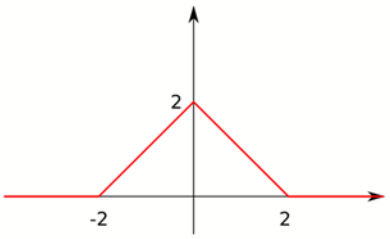
$$\lim_{c\to\infty} \left| e^{-(a+j\omega)\cdot c} \right| = \lim_{c\to\infty} e^{-ac} = 0$$

somit $\lim_{c\to\infty} e^{-(a+j\omega)c} = 0$

d.h. $F(\omega) = \frac{1}{a+j\cdot\omega} \in \mathbb{C}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

iv) Hutfunktion



$$f(t)=\begin{cases}0 & t<-2\\ t+2 & t\in[-2,0)\\ -t+2 & t\in[0,2)\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$$

▶ 8

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\cdot\omega t}\,dt=\int_{-2}^{2} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-2}^{0}(t+2)\,e^{-j\omega t}\,dt+\int_{0}^{2}(-t+2)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

TNR: $\int t\cdot e^{-j\omega t}\,dt$ & $\int e^{-j\omega t}\,dt$

$$\cdot\int e^{-j\omega t}\,dt=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}+K_1 \qquad S_1(t)=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}$$

$$\cdot\int t\,e^{-j\omega t}\,dt=\underset{\text{part. Int.}}{}-\frac{1}{j\omega}t\cdot e^{-j\omega t}+\frac{1}{j\omega}\int e^{-j\omega t}\,dt$$

$u=t\Rightarrow u'=1$

$v'=e^{-j\omega t}\Rightarrow v=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}$

$$=-\frac{1}{j\omega}t\cdot e^{-j\omega t}-\frac{1}{(j\omega)^2}\cdot e^{-j\omega t}+K_2$$

$$=\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{j\omega}\cdot t\right)e^{-j\omega t}+K_2 \qquad S_2(t)=\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{j\cdot\omega}\cdot t\right)e^{-j\omega t}$$

$$F(\omega)=\int_{-2}^{0}(t+2)\,e^{-j\omega t}\,dt+\int_{0}^{2}(-t+2)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-2}^{0}t\cdot e^{-j\omega t}\,dt+2\cdot\int_{-2}^{0}e^{-j\omega t}\,dt-\int_{0}^{2}t\cdot e^{-j\omega t}\,dt+2\cdot\int_{0}^{2}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-2}^{0}t\cdot e^{-j\omega t}\,dt-\int_{0}^{2}t\cdot e^{-j\omega t}\,dt+2\int_{-2}^{2}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$=S_2(t)\Big|_{-2}^{0}-S_2(t)\Big|_{0}^{2}+2\cdot S_1(t)\Big|_{-2}^{2}$$

$$=S_2(0)-S_2(-2)-\left(S_2(2)-S_2(0)\right)+2\left(S_1(2)-S_1(-2)\right)$$

$$=2\cdot S_2(0)-S_2(-2)-S_2(2)+2\left(S_1(2)-S_1(-2)\right)$$

$$=2\cdot\frac{1}{\omega^2}-\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{2}{j\omega}\right)e^{2j\omega}-\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{2}{j\omega}\right)e^{-2j\omega}+2\left(-\frac{1}{j\omega}e^{-2j\omega}+\frac{1}{j\omega}e^{2j\omega}\right)$$

$$=\frac{2}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^2}e^{2j\omega}-\cancel{\frac{2}{j\omega}e^{2j\omega}}-\frac{1}{\omega^2}e^{-2j\omega}+\cancel{\frac{2}{j\omega}e^{-2j\omega}}-\cancel{\frac{2}{j\omega}e^{-2j\omega}}+\cancel{\frac{2}{j\omega}e^{2j\omega}}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$= \frac{2}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\left(e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}\right)$$

$$= \frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2}\,\frac{e^{j(2\omega)} + e^{-j(2\omega)}}{2}$$

$$= \frac{2}{\omega^2}\left(1 - \cos(2\omega)\right) = \frac{2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega+\omega)\right)$$

Erinnerung:

$$\cos(x) = \frac{e^{j\cdot x} + e^{-jx}}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$= \frac{2}{\omega^2}\left(\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) - \left(\cos^2(\omega) - \sin^2(\omega)\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\omega^2}\left(\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) - \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)\right)$$

$$= 4\cdot\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} = 4\cdot\left(\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)^2 = 4\cdot\mathrm{sinc}^2(\omega) \quad \in \mathbb{R}$$

▶ 9 im Video: abschließende Erklärungen und Ausblick

Dr. rer. nat. M. Striebel