Fouriertransformation : Begriffe und Zusammenhänge

Erinnerung : Fourierreihe

Annahme : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ T-periodisch und erfüllt Dirichletsche Bedingungen.

▶ 1

dann:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(k\omega t + \varphi_k) \qquad \text{spektrale Fourierreihe,}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t) \qquad \text{reelle Fourierreihe,}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t} \qquad \text{komplexe Fourierreihe.}$$

mit Koeffizienten:

- reell:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots$$

- komplex:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Zusammenhänge / Umrechnung der Koeffizienten:

reell $\rightsquigarrow$ komplex:

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - j \cdot b_k),\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + j \cdot b_k) \quad k \in \mathbb{N}. \qquad c_{-k} = \overline{c_k}$$

komplex $\rightsquigarrow$ reell:

$$a_0 = 2 \cdot c_0,\ a_k = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_k),\ b_k = -2 \cdot \mathrm{Im}(c_k), \quad k \in \mathbb{N}$$

reell $\rightsquigarrow$ spektral:

$$A_0 = a_0 \quad \& \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \& \quad \tan(\varphi_k) = \frac{a_k}{b_k} \quad \text{für } k \geq 1$$

komplex $\rightsquigarrow$ spektral:

$$A_0 = 2 \cdot c_0 \quad \& \quad A_k = 2 \cdot |c_k| \quad \& \quad \varphi_k = \arg(c_k) + \frac{\pi}{2} \quad \text{für } k \geq 1$$

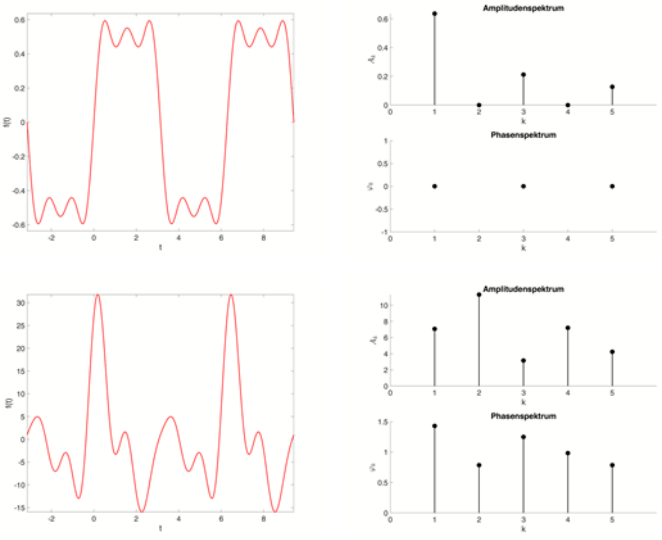
Von Interesse:

Amplitudenspektrum $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$

↑ besagt, welche Frequenzen wie stark gewichtet in f enthalten sind ($A_k = 0 \Leftrightarrow$ Frequenz $k \cdot \omega$ nicht enthalten)

▶ 2

Phasenspektrum $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$



Amplituden- & Phasenspektrum für die Fouriertransformation

▶ 3

mit $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega \quad \text{und} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, e^{-j\omega t} \, dt$$

↳ erinnert an c_k (komplexe Fourierreihe)

Definition (Amplituden- & Phasenspektrum)

Mit $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ nennt man

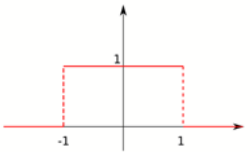
- $|F(\omega)|$ das Amplitudenspektrum von f
- $\arg(F(\omega))$ das Phasenspektrum von f.

⚠ Amplitudenspektrum gibt an welche Frequenz mit welcher Gewichtung im Signal enthalten ist.

▶ 7 und Zusammenfassung

Beispiele

i) Rechteckimpuls:

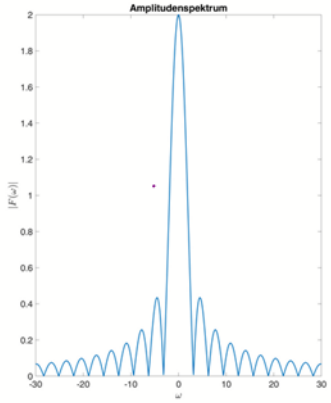


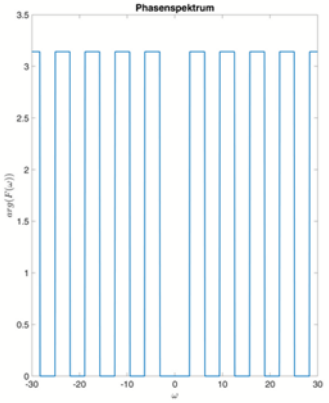
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & t \in [-1, 1) \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

▶ 4

Fouriertransformierte: $F(\omega) = 2 \cdot \text{sinc}(\omega) \in \mathbb{R}$

- Amplitudenspektrum $|F(\omega)| = |2 \cdot \text{sinc}(\omega)|$
- Phasenspektrum $\arg(F(\omega)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 2 \cdot \text{sinc}(\omega) > 0 \\ \pi, & \text{falls } 2 \cdot \text{sinc}(\omega) < 0 \end{cases}$

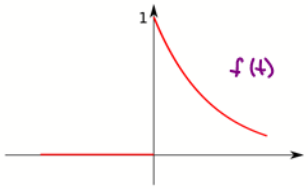




Dr. rer. nat. M. Striebel

ii) Einseitige Exponentialfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ e^{-a \cdot t} & , t \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } a > 0 \text{ (konstant)}$$

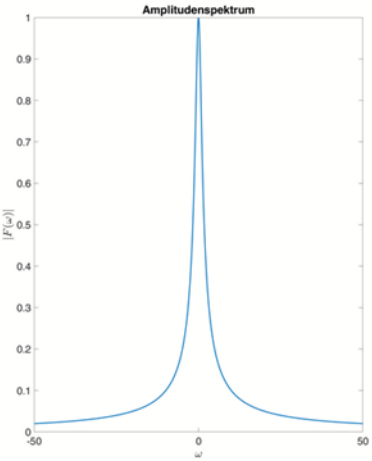


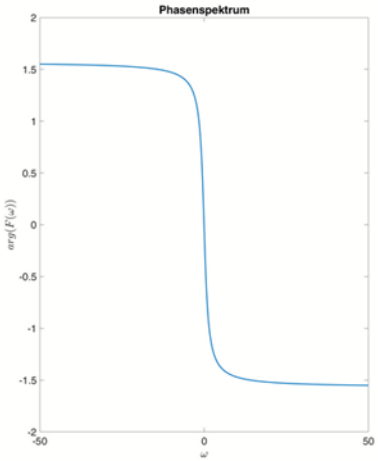
▶ 5

Fouriertransformierte: $F(\omega) = \frac{1}{a + j \cdot \omega}$

Amplitudenspektrum: $|F(\omega)| = \left| \frac{1}{a+j\cdot\omega} \right| = \frac{1}{|a+j\cdot\omega|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$

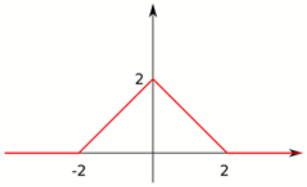
Phasenspektrum: $\arg(F(\omega)) = \arg\left(\frac{1}{a+j\cdot\omega}\right) = -\arg(a+j\cdot\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$





für a = 1

iii) Hutfunktion:



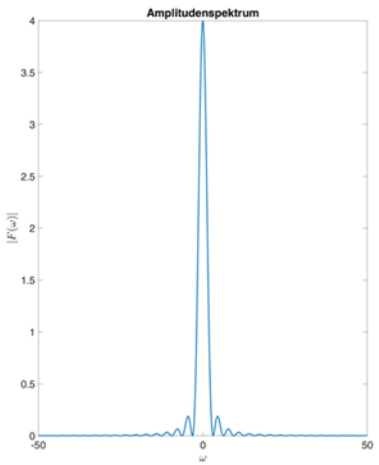
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ t+2 & t \in [-2,0) \\ -t+2 & t \in [0,2) \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

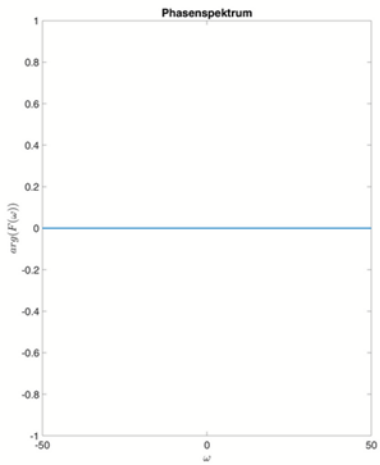
▶ 6

Fouriertransformierte $F(\omega) = 4 \cdot \text{sinc}^2(\omega) \in \mathbb{R}$

Amplitudenspektrum $|F(\omega)| = |4 \cdot \text{sinc}^2(\omega)| = 4 \cdot \text{sinc}^2(\omega)$

Phasenspektrum $\arg(F(\omega)) = 0$





Dr. rer. nat. M. Striebel

Fourier-Sinus- & Fourier-Cosinus-Transformation

(Verbindung zur reellen Fourierreihe)

▶ 8

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos(\omega t) - j\cdot\sin(\omega t))\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt}_{=: R(\omega)} + j\cdot\underbrace{\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)\, dt\right)}_{=: I(\omega)} = R(\omega) + j\cdot I(\omega)$$

Beobachtungen:
- $R(\omega)$ ist achsensymmetrisch, d.h. $R(-\omega) = R(\omega)$
- $I(\omega)$ ist punktsymmetrisch, d.h. $I(-\omega) = -I(\omega)$

Erinnerung:
- uneigentliche Integrale im CH-Sinn (d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} g(t)\, dt$)

▶ 9

- g achsensymmetrisch / gerade $\Rightarrow \int_{-c}^{c} g(t)\, dt = 2\cdot\int_{0}^{c} g(t)\, dt$
- g punktsymmetrisch / ungerade $\Rightarrow \int_{-c}^{c} g(t)\, dt = 0$
- g gerade $\wedge$ h gerade $\Rightarrow$ g·h gerade
  g gerade $\wedge$ h ungerade $\Rightarrow$ g·h ungerade
  g ungerade $\wedge$ h ungerade $\Rightarrow$ g·h gerade

Somit **1. Fall:** f gerade $\Rightarrow$ $f(t)\cdot\cos(\omega t)$ gerade, $f(t)\cdot\sin(\omega t)$ ungerade

▶ 10

$\Downarrow$ $R(\omega) = 2\cdot\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)\, dt$ $\qquad$ $\Downarrow$ $I(\omega) = 0$

$$\Rightarrow F(\omega) = R(\omega) = 2\cdot\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)\, dt$$ (vgl. a_k der reellen Fourierreihe)

2. Fall: f ungerade $\Rightarrow$ $f(t)\cdot\cos(\omega t)$ ungerade, $f(t)\cdot\sin(\omega t)$ gerade

▶ 11

$\Downarrow$ $R(\omega) = 0$ $\qquad$ $\Downarrow$ $I(\omega) = -2\cdot\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)\, dt$

$$\Rightarrow F(\omega) = j\cdot I(\omega) = -2\cdot j\cdot\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)\, dt$$ (vgl. b_k der reellen Fourierreihe)

3. Fall: f nicht symmetrisch

▶ 12

man kann f als Summe einer geraden & einer ungeraden Funktion darstellen
(hier nicht weiter behandelt)

Dr. rer. nat. M. Striebel

Definition (Fourier-Sinus- & Fourier-Cosinus-Transformation)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$ eine gegebene Funktion.

▶ 13

Falls die jeweiligen Integrale existieren nennt man F_c und F_s die *Fourier-Cosinus-* bzw. die *Fourier-Sinus-Transformierte* von f, wobei:

$$F_c(\omega) := \mathcal{F}_c\{f(t)\} := \int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$
$$F_s(\omega) := \mathcal{F}_s\{f(t)\} := \int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

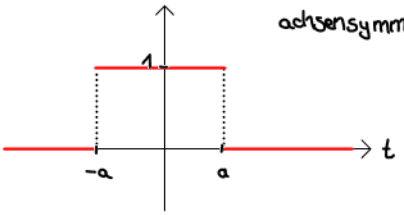
Somit gilt:
- f achsensymmetrisch / gerade $\Rightarrow$ $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; 2 \cdot F_c(\omega)$
- f punktsymmetrisch / ungerade $\Rightarrow$ $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; -2j \cdot F_s(\omega)$

Beispiele (anhand Bronstein)

i) **21.14.1 Fourier Cosine Transformation**

▶ 14

No.	$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos(t\omega)\,dt$
1.	1, $0 < t < a$ 0, $t > a$	$\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$



achsensymmetrisch!

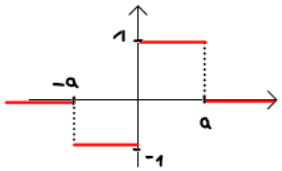
Rechtecksimpuls

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -a < t < a \\ 0, & \text{sons} \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet\; 2 \cdot \frac{\sin(a\omega)}{\omega} = F(\omega)$$

ii) **21.14.2 Fourier Sine Transformation**

No.	$f(t)$	$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin(t\omega)\,dt$
1.	1, $0 < t < a$ 0, $t > a$	$\frac{1-\cos(a\omega)}{\omega}$

▶ 15



Punktsymmetrisch

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -a \\ -1, & -a < t < 0 \\ 1, & 0 < t < a \\ 0, & t > a \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet\; -2j \cdot \frac{1-\cos(a\omega)}{\omega} = F(\omega)$$

▶ 16 im Video: abschließende Bemerkungen zur Ähnlichkeit von Fourier-Transformation und -Reihe

Dr. rer. nat. M. Striebel