Hilfsfunktionen und Begriffe im Kontext Signale, Fourier- & Laplacetransformation

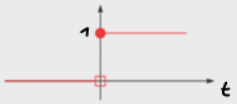
Heaviside Funktion / Sprungfunktion

▶ 1

Definition (Heaviside-Funktion)

Die Funktion

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sigma(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



heißt *Heaviside-Funktion*.

Bemerkung:

Statt $\sigma(t)$ (Sigma) wird die Heaviside-Funktion auch mit $H(t)$ bezeichnet

Bedeutung der Heaviside-Funktion

- Sie ist ein wichtiger Vertreter der sog. kausalen Signale / kausalen Funktionen.

▶ 2

Definition (Kausale Funktion / Kausales Signal)

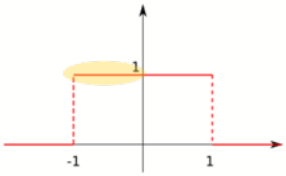
Eine Funktion (ein Signal) f heißt *kausal*, wenn gilt:

$$t < 0 \Rightarrow f(t) = 0 \quad (\text{bzw. } f(t) = 0\ \forall t < 0)$$

Beispiele

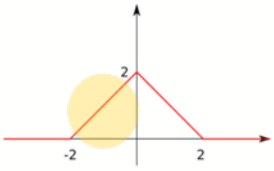
i) Heaviside Funktion: kausal

ii) Rechtecksimpuls: nicht kausal



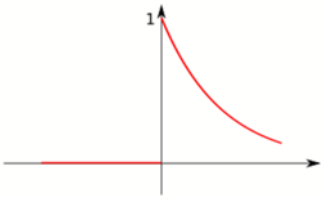
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & t \in [-1, 1) \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

iii) Hutfunktion: nicht kausal



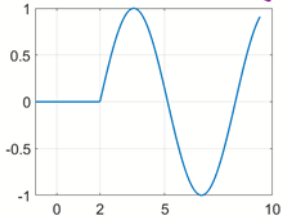
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ t+2 & t \in [-2, 0) \\ -t+2 & t \in [0, 2) \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

iv) einseitig abklingende Exponentialfunktion: kausal



$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } a > 0$$

v.) Verschobener (spät beginnender) Sinus: kausal



$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \sin(t-2), & t \geq 2 \end{cases}$$

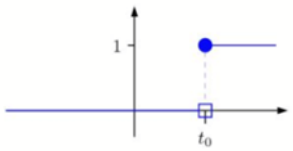
Dr. rer. nat. M. Striebel

- Die Heaviside Funktion „erzeugt" kausale Signale: ▶ 3

Für beliebiges $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto g(t)$ ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) := G(t) \cdot g(t)$ kausal

denn: $f(t) = g(t) \cdot G(t) = g(t) \cdot \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ g(t), & t \geq 0 \end{cases}$.

- Die Heaviside Funktion beschreibt und modelliert Einschaltvorgänge: ▶ 4



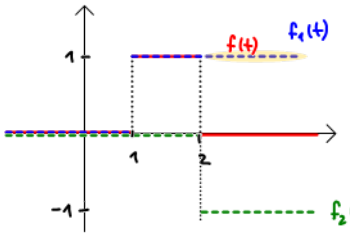
wird beschrieben durch: $G(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$

- Die Heaviside Funktion kann benutzt werden zur kompakten Darstellung abschnittsweise definierter Funktionen ▶ 5

Beispiele:

i) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases} = G(t) \cdot e^{-at}$ ▶ 6

ii) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \sin(t-2), & t \geq 2 \end{cases} = G(t-2) \cdot \sin(t-2)$ ▶ 7

iii) 

$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$ ▶ 8

mit $f_1(t) = G(t-1)$

und $f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -1, & t \geq 2 \end{cases} = -G(t-2)$

ergibt sich: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = G(t-1) - G(t-2)$

$= G(t-1) - G(t-1) \cdot G(t-2)$

allgemein: $t_0 < t_1$

$G(t-t_0) \cdot G(t-t_1) = G(t-t_1)$

$= G(t-1) \cdot (1 - G(t-2))$

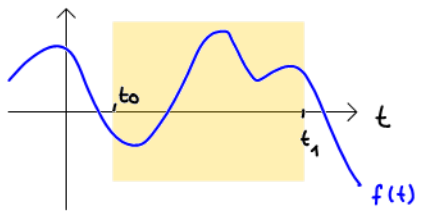
$= \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$ Einschalten bei $t = 1$

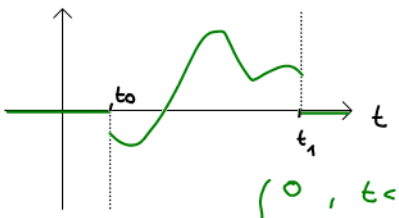
$1 - \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$ Ausschalten bei $t = 2$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Exkurs: Signale ein- & ausschalten mit der Heaviside-Funktion

▶ 9

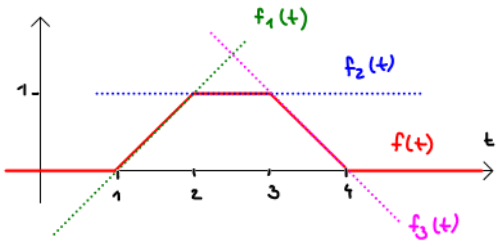




$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t), & t_0 \le t < t_1 \\ 0, & t \ge t_1 \end{cases}$$

Es ist $g(t) = \underbrace{\sigma(t-t_0)}_{=\begin{cases}0, t<t_0\\1, t\ge t_0\end{cases}} \cdot f(t) \cdot \underbrace{(1-\sigma(t-t_1))}_{=\begin{cases}1, t<t_1\\0, t\ge t_1\end{cases}}$

Beispiel:



$f_1(t) = t-1$

$f_2(t) = 1$

$f_3(t) = -t+4$

▶ 10

$$f(t) = \sigma(t-1)\, f_1(t)\, (1-\sigma(t-2)) + \sigma(t-2)\, f_2(t)\, (1-\sigma(t-3)) + \sigma(t-3)\, f_3(t)\, (1-\sigma(t-4))$$

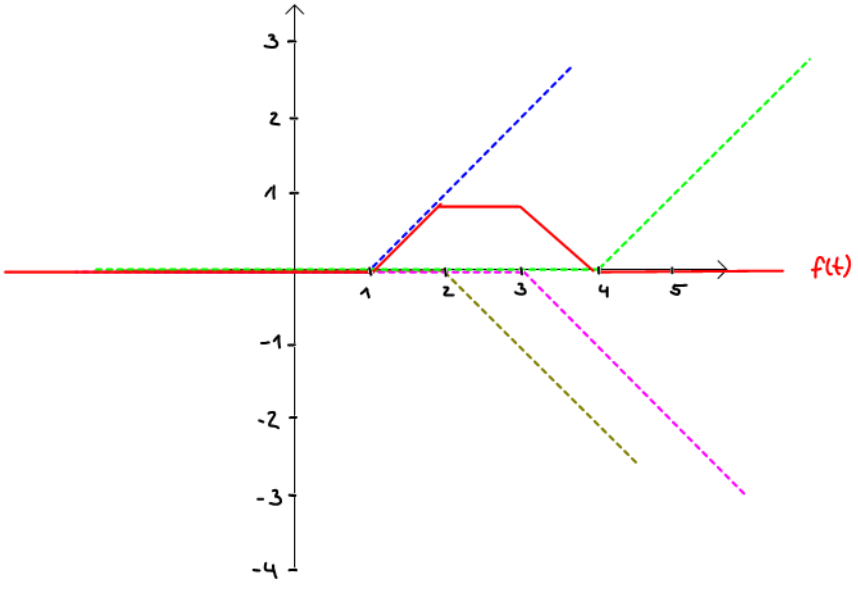
$$\Rightarrow f(t) = \sigma(t-1)\,(t-1)\,(1-\sigma(t-2)) + \sigma(t-2)\cdot 1\cdot (1-\sigma(t-3)) + \sigma(t-3)\,(-t+4)\,(1-\sigma(t-4))$$

$$= \sigma(t-1)\,(t-1) - \underbrace{\sigma(t-1)\cdot\sigma(t-2)}_{=\sigma(t-2)}\cdot(t-1) + \sigma(t-2) - \underbrace{\sigma(t-2)\cdot\sigma(t-3)}_{=\sigma(t-3)}$$

$$+ \sigma(t-3)\,(-t+4) - \underbrace{\sigma(t-3)\cdot\sigma(t-4)}_{=\sigma(t-4)}\,(-t+4)$$

$$= \sigma(t-1)\cdot(t-1) + \sigma(t-2)\,(-t+1+1) + \sigma(t-3)\,(-1-t+4) + \sigma(t-4)\,(t-4)$$

$$= \sigma(t-1)\,(t-1) + \sigma(t-2)\,(-t+2) + \sigma(t-3)\,(-t+3) + \sigma(t-4)\,(t-4)$$

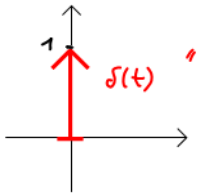


Dr. rer. nat. M. Striebel

Dirac-Impuls / „Diracsche δ-Funktion"

Idee:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0 \\ \infty & , t = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$



▶ 11

⚠ δ-Funktion / Dirac-Impuls keine Funktion im klassischen Sinne

(denn Funktionswert $\delta(0) = \infty$ ← kein Wert)

Dirac-Impuls symbolisiert einen unendlich kurz wirkenden aber unendlich starken Energiestoß

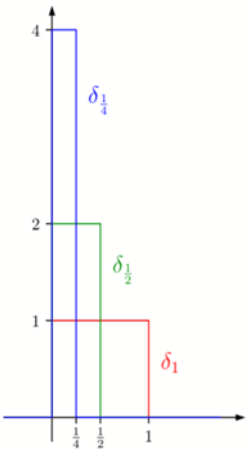
Modellierung der δ-Funktion über klassische Funktionen

▶ 12

1.) über Rechtecks-Impulse

ausgehend von der von ε abhängigen Funktion $\delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \delta_\varepsilon(t) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

definiert man $\boxed{\delta(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)}$



⚠ δ_ε ist nicht die δ-Funktion

δ_ε approximiert für $\varepsilon \ll 1$ die δ-Funktion

Es ist: für $\varepsilon > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot t \Big|_0^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \cdot 0 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$$

d.h. $\lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\, dt = 1$ ✓

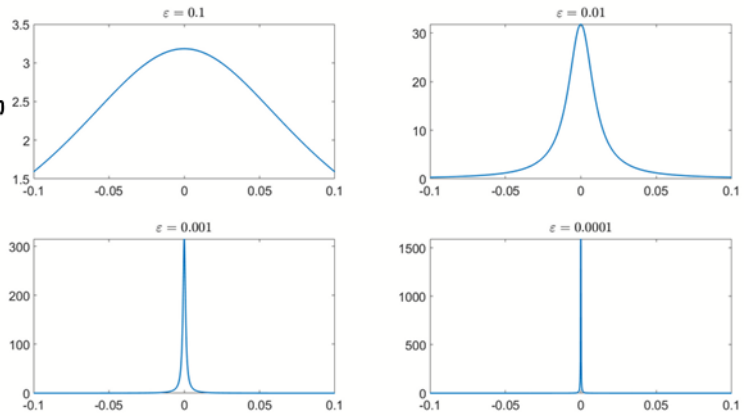
2.) über differenzierbare Funktion

ausgehend von der von ε abhängigen Funktion

$$\tilde{\delta}_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \tilde{\delta}_\varepsilon(t) := \frac{\varepsilon}{\pi \cdot (\varepsilon^2 + t^2)}$$

▶ 13

definiert man $\boxed{\delta(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\delta}_\varepsilon(t)}$



Es ist zudem für $\varepsilon > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}_\varepsilon(t)\, dt = \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \int_a^b \frac{\varepsilon}{\pi \cdot (\varepsilon^2 + t^2)}\, dt$$

Dr. rer. nat. M. Strieb

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{\varepsilon^2+t^2}\,dt$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(t) + C$$

NR: $\int \frac{1}{\varepsilon^2+t^2}\,dt = \int \frac{1}{\varepsilon^2\left(1+\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2\right)}\,dt =$

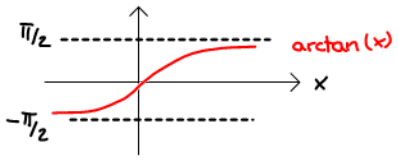
Substitution $u = \frac{t}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow dt = \varepsilon \cdot du$

$= \int \frac{1}{\varepsilon^2(1+u^2)} \cdot \varepsilon\,du = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{\varepsilon}\arctan(u) + C$

$= \frac{1}{\varepsilon}\arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + C$ (Resub.)

$$= \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\varepsilon}\arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\Big|_a^b = \frac{1}{\pi}\left(\lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \left(\arctan\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{b\to\infty} \arctan\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) - \lim_{a\to-\infty} \arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)\right)$$



$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1$$

d.h. $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}_\varepsilon(t)\,dt = 1$ ✓

⚠ $\tilde{\delta}_\varepsilon$ ist nicht die δ-Funktion

$\tilde{\delta}_\varepsilon$ approximiert für $\varepsilon \ll 1$ die δ-Funktion

Eigenschaften des Dirac-Impulses

▶ 14

Satz (Abtasteigenschaft des Dirac-Impulses)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t)\,dt = f(0)$$

⚠ Hier wird einer Funktion eine Zahl zugeordnet.

Hier schreibt man auch

$\langle \delta, f \rangle = f(0)$

und bezeichnet die Abbildung:

$\langle \delta, \cdot \rangle : C^0(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R},\ f \mapsto f(0)$

als Funktional.

Nachweis der Abtasteigenschaft via Approximation der δ-Funktion durch die Rechtecksimpulse

▶ 15

Sei $\varepsilon > 0$.

Dann ist $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\cdot f(t)\,dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\cdot f(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot f(c)$ für ein $c \in [0,\varepsilon]$

↑ MWS Integralrechnung: $\exists\, c \in [a,b] : \int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\cdot f(c)$

$= f(c)$

bzw. $\exists\, c \in [0,\varepsilon] : \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\cdot f(t)\,dt = f(c)$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Für $\varepsilon \to 0$: $\cdot\ \delta_\varepsilon(t) \to \delta(t)$

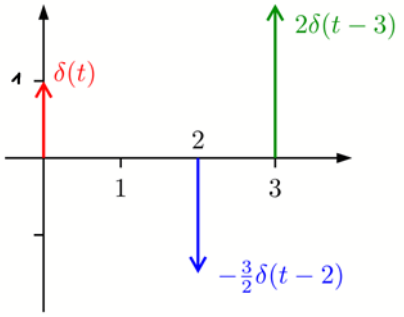
$\cdot\ [0, \varepsilon] \to [0,0] = \{0\}$

Somit: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t)\,dt = f(0)$ (#)

Verallgemeinerung:

für $\lambda \in \mathbb{R}$, $t_0 \geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, \delta(t - t_0) \cdot f(t)\,dt = \lambda \cdot f(t_0)$$



▶ 16

Beispiele:

i) mit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) = \sin(t)$

▶ 17

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t)\,dt = \sin(0) = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} 3 \cdot \delta(t - \pi/2)\, f(t) = 3 \cdot \sin(\pi/2) = 3 \cdot 1 = 3$

ii) mit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) = e^t$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t)\,dt = \langle \delta(t), f(t) \rangle = e^0 = 1$
- $\langle -2 \cdot \delta(t-1), e^t \rangle = -2 \cdot e^1 = -2 \cdot e = \int_{-\infty}^{\infty} -2 \cdot \delta(t-1) \cdot e^t\,dt.$

„Stammfunktion & Ableitung" des Dirac-Impulses

▶ 18

- „Stammfunktion"

Erinnerung: Hauptsatz der Integralrechnung:

▶ 19

$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f ($a \in \mathbb{R}$)

Fragestellung: $\int_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt$?

wegen der Ausblendeigenschaft, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t)\,dt = f(0)$ gilt: $\int_{-\infty}^{x} \delta(t)\, f(t)\,dt = \begin{cases} f(0), & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

insbesondere gilt für $f(t) = G(t)$:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(t) \cdot G(t)\,dt = \begin{cases} G(0), & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = G(x)$$

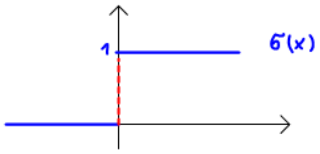
$= \begin{cases} 1, & \text{falls } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$\Rightarrow \int_0^x \delta(t)\,dt = \sigma(x)$$

Also ist ...

- die Heaviside-Funktion eine „Stammfunktion" des Dirac-Impulses
- der Dirac-Impuls die „Ableitung" der Heaviside-Funktion: $\sigma'(x) = \delta(x)$



- sofort ersichtlich: $\sigma'(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0$
- in übertragenem Sinne: „$\lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = \infty$"

Man definiert

▶ 20

Definition (verallgemeinerte Ableitung)

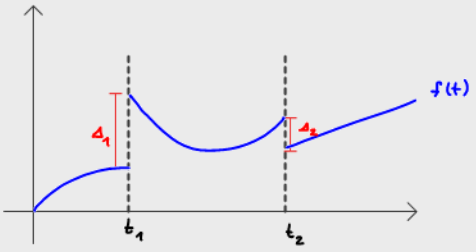
Sei $f: I \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)$ stückweise stetig und bis auf die Sprungstellen $t_1, \dots, t_n$ stetig differenzierbar.

Dann nennt man

$$\frac{Df}{Dt}(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \cdot \delta(t - t_k)$$

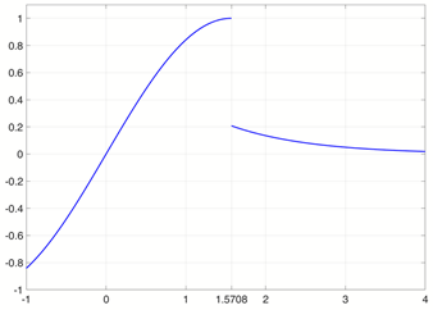
mit $\Delta_k := f(t_k+) - f(t_k-)$ (Sprunghöhen)

die verallgemeinerte Ableitung von f



Beispiel:

mit $f(t) = \begin{cases} \sin(t), & t < \pi/2 \\ e^{-t}, & t > \pi/2 \end{cases}$



▶ 21

Sprungunstetigkeit für $t_1 = \pi/2$

mit Sprunghöhe $\Delta_1 = e^{-\pi/2} - \sin(\pi/2) = e^{-\pi/2} - 1$

mit $f'(t) = \begin{cases} \cos(t), & t < \pi/2 \\ -e^{-t}, & t > \pi/2 \end{cases}$

ist $\frac{Df}{Dt} = f'(t) + \Delta_1 \cdot \delta(t - \pi/2)$

Dr. rer. nat. M. Striebel

- „Ableitung"

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \cdot f(t)\, dt =$ partielle Int.

$u = f(t) \Rightarrow u' = f'(t)$

$v' = \delta'(t) \Rightarrow v = \delta(t)$

$$f(t) \cdot \delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \cdot \delta(t)\, dt$$

$= 0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,(-f'(t))\,dt = -f'(0)$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t) \cdot f(t)\, dt =$ part. Int.

$u = f(t) \Rightarrow u' = f'(t)$

$v' = \delta''(t) \Rightarrow v = \delta'(t)$

$$\underbrace{f(t) \cdot \delta'(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \cdot f'(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,(-f'(t))\,dt = +f''(0)$$

somit ergibt sich eine verallgemeinerte Abtasteigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \cdot f(t)\, dt = (-1)^n \cdot f^{(n)}(0)$$

Dr. rer. nat. M. Striebel