Fouriertransformation & inverse Fouriertransformation

mit Rechenregeln und Tabellen

▶ 1

Linearität	$\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \alpha \cdot F_1(\omega) + \beta \cdot F_2(\omega)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot F(\frac{\omega}{a})$ für $a \neq 0$
Verschiebungssatz	$f(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-j\omega t_0} F(\omega)$ für $t_0 \in \mathbb{R}$
Dämpfungssatz	$e^{j\omega_0 t} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega - \omega_0)$ für $\omega_0 \in \mathbb{R}$
1. Differentiationssatz	$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, j\omega F(\omega)$ & $f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, (j\omega)^n F(\omega)$
2. Differentiationssatz	$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, j^n F^{(n)}(\omega)$
1.Integrationssatz	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{j\omega} F(\omega)$ falls $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. Integrationssatz	$\int_a^b F(\omega)\,\mathrm{d}\omega \bullet\!\!-\!\!\circ\, j\,(g(b) - g(a))$ mit $g(t) = \frac{f(t)}{t}$
Vertauschungssatz	$F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi \cdot f(-\omega)$
Faltungssatz	$f_1 * f_2 \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1 \cdot F_2$ & $f_1 \cdot f_2 \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2\pi} F_1 * F_2$

jeweils unter der Voraussetzung

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$

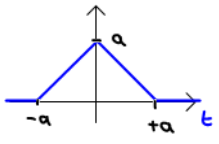
bzw. $f_i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_i(\omega)$

mit Dreiecksfunktion / Hutfunktion

▶ 4

$$\mathrm{tri}_a(t) = \begin{cases} a - |t| & , |t| \leq a \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

für $a > 0$



$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1	$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$\sigma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a + j\omega}$ $(a > 0)$
$\frac{1}{2a} e^{-a\lvert t \rvert}$	$\frac{1}{\omega^2 + a^2}$	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega - a)$
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\frac{t}{t^2 + a^2}$	$-j\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}\mathrm{sign}(\omega)$
$\sigma(t + a) - \sigma(t - a)$	$\frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = 2a\,\mathrm{sinc}(a\,\omega)$	tri_a	$a^2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\,\omega}{2}\right)$
$\sin(at)$	$j\pi\,(\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a))$	$\cos(at)$	$\pi\,(\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a))$

umfassende Tabellen in allen gängigen Formelsammlung

Grundlage: Integraldefinition

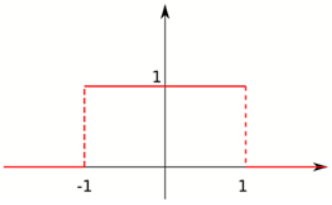
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \& \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

falls f an der Stelle t stetig

Dr. rer. nat. M. Striebel

Wir haben händisch bestimmt:

i.) Rechtecksimpuls



▶ 2

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & t \in [-1, 1) \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} \quad \multimap \quad F(\omega) = 2 \cdot \mathrm{sinc}(\omega)$$

zur Bestimmung via Tabelle:

$f(t) = G(t-(-1)) \cdot 1 \cdot (1 - G(t-1))$

$= G(t+1) - G(t+1) \cdot G(t-1)$

$= G(t+1) - G(t-1)$

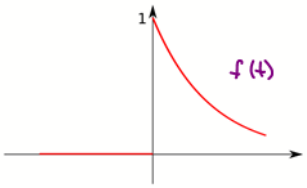
$\multimap \quad 2 \cdot \mathrm{sinc}(\omega) = F(\omega)$

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1	$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$\sigma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a+j\omega}\ (a>0)$
$\frac{1}{2a}e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{1}{\omega^2+a^2}$	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\frac{t}{t^2+a^2}$	$-j\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}\mathrm{sign}(\omega)$
$\sigma(t+a)-\sigma(t-a)$	$\frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$	tri_a	$a^2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$
$\sin(at)$	$j\pi(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$	$\cos(at)$	$\pi(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$

mit $a=1$

ii) Einseitige Exponentialfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-a \cdot t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } a > 0 \text{ (konstant)}$$



▶ 3

$\multimap \quad F(\omega) = \frac{1}{a + j \cdot \omega}$

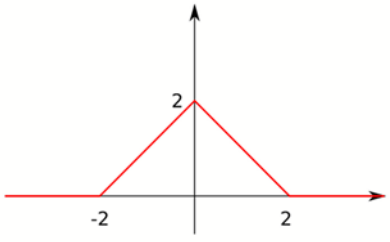
zur Bestimmung mittels Tabelle

$f(t) = G(t) \cdot e^{-a \cdot t}$

$\multimap \quad \frac{1}{a+j\cdot\omega} = F(\omega)$

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1	$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$\sigma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a+j\omega}\ (a>0)$
$\frac{1}{2a}e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{1}{\omega^2+a^2}$	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\frac{t}{t^2+a^2}$	$-j\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}\mathrm{sign}(\omega)$
$\sigma(t+a)-\sigma(t-a)$	$\frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$	tri_a	$a^2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$
$\sin(at)$	$j\pi(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$	$\cos(at)$	$\pi(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$

iii) Hutfunktion

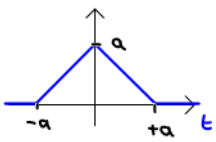


▶ 4

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ t+2 & t \in [-2, 0) \\ -t+2 & t \in [0, 2) \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \quad \multimap \quad 4 \cdot \mathrm{sinc}^2(\omega) = F(\omega)$$

$f(t) = \mathrm{tri}_2(t)$

mit $\mathrm{tri}_a(t) = \begin{cases} a - \lvert t\rvert, & \lvert t\rvert \leq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$



für $a > 0$

somit via Tabelle

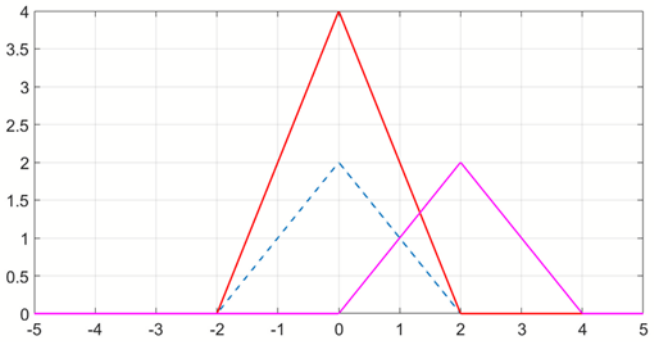
$f(t) = \mathrm{tri}_2(t) \multimap 2^2 \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2\omega}{2}\right)$

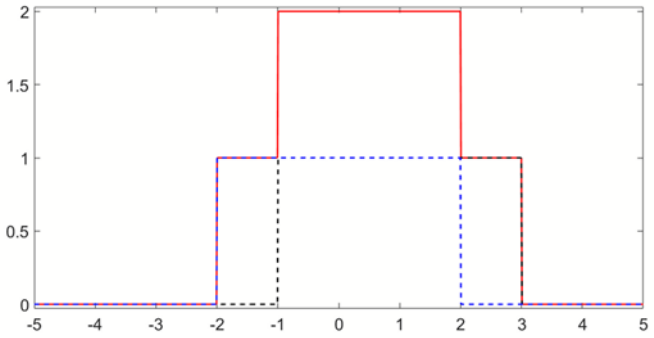
$= 4 \cdot \mathrm{sinc}^2(\omega) = F(\omega)$

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1	$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$\sigma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a+j\omega}\ (a>0)$
$\frac{1}{2a}e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{1}{\omega^2+a^2}$	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\frac{t}{t^2+a^2}$	$-j\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}\mathrm{sign}(\omega)$
$\sigma(t+a)-\sigma(t-a)$	$\frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$	tri_a	$a^2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$
$\sin(at)$	$j\pi(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$	$\cos(at)$	$\pi(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$

Dr. rer. nat. M. Striebel

nicht alles ist mit Tabellen transformierbar – einige Beispiele





$f_1(t) = tri_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(\omega) = 4 \cdot sinc^2(\omega)$ (Tabelle)

$f_2(t) = tri_2(t-2) = f_1(t-2)$ (Verschiebungssatz $t_0 = 2$)

$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j\omega \cdot 2} \cdot F_1(\omega) = 4 \cdot e^{-2\omega j} \cdot sinc^2(\omega)$

$f_3(t) = 2 \cdot tri_2(t) = 2 \cdot f_1(t)$ (Linearität)

$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2 \cdot F_1(\omega) = 2 \cdot 4 \cdot sinc^2(\omega) = 8 \cdot sinc^2(\omega)$

$g_1(t) = G(t+2) - G(t-2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G_1(\omega) = 4 \cdot sinc(2\omega)$ (Tabelle)

$g_2(t) = G(t+1) - G(t-3) = g_1(t-1)$ (Verschiebungssatz)

$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad G_2(\omega) = e^{-j\cdot\omega\cdot 1} \cdot G_1(\omega)$

$= 4 \cdot sinc(2\omega) \cdot e^{-j\cdot\omega}$

$g_3(t) = g_1(t) + g_2(t)$ (Linearität)

$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad G_3(\omega) = G_1(\omega) + G_2(\omega)$

$= 4 \cdot sinc(2\omega) + 4\, sin(2\omega) \cdot e^{-j\omega}$

$= 4 \cdot sinc(2\omega) \left(1 + e^{-j\omega}\right)$

Dr. rer. nat. M. Striebel

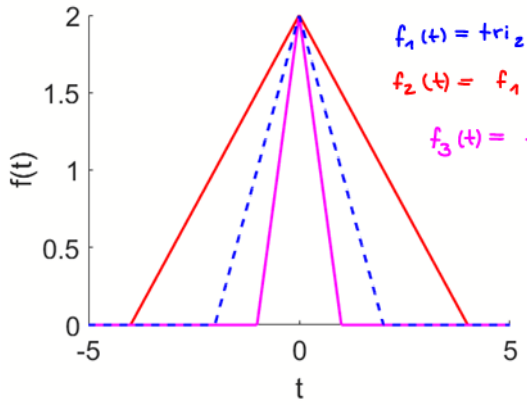
Nachweis und Anwendung einiger Rechenregeln

- Ähnlichkeitssatz

$$f(a\cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{für } a \neq 0$$

Effekt einer Zeitskalierung

▶ 6



$f_1(t) = tri_2(t)$

$f_2(t) = f_1\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)$

$f_3(t) = f_1(2\cdot t)$

▶ 7

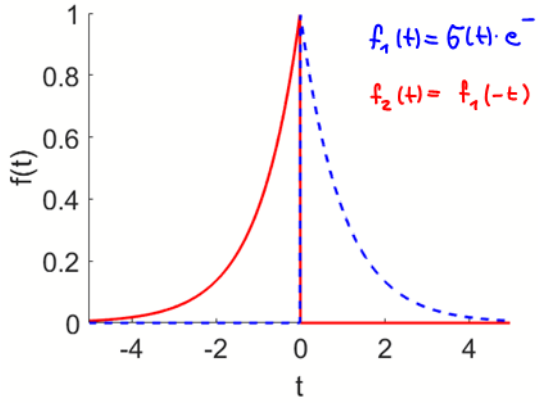
mit $f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(\omega) = 4\cdot \mathrm{sinc}^2(\omega)$

ist $f_2(t) = f_1\left(\frac{1}{2}\cdot t\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|\frac{1}{2}|}\cdot F_1\left(\frac{\omega}{\frac{1}{2}}\right) \ldots$

$= 2\cdot F_1(2\omega) = 8\cdot \mathrm{sinc}^2(2\omega)$

und $f_3(t) = f_1(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|2|}\cdot F_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} F_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2\cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$



$f_1(t) = \sigma(t)\cdot e^{-t}$

$f_2(t) = f_1(-t)$

▶ 8

mit $f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(\omega) = \frac{1}{1+j\cdot\omega}$

ist $f_2(t) = f_1(-1\cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|-1|}\cdot F_1\left(\frac{\omega}{-1}\right) \ldots$

$= F_1(-\omega) = \frac{1}{1-j\cdot\omega}$

Nachweis:

bekannt ist: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$

▶ 9

damit: $\mathcal{F}\{f(a\cdot t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(a\cdot t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt \overset{CH}{=} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(a\cdot t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$ ☹

$= \lim_{c\to\infty} \int_{-a\cdot c}^{a\cdot c} f(u)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot\frac{u}{a}}\,\frac{1}{a}\,du$

Substitution:

$u = a\cdot t \quad (t = \frac{u}{a})$

$\Rightarrow \frac{du}{dt} = a \Rightarrow dt = \frac{1}{a}\,du$

Grenzen:

$t = -c \Rightarrow u = -a\cdot c$

$t = c \Rightarrow u = a\cdot c$

Nebenbetrachtung zu den Grenzen

▶ 10

für $c\to\infty$:

- $a\cdot c \to \infty$ wenn $a > 0$
- $a\cdot c \to -\infty$ wenn $a < 0$

- $-a\cdot c \to -\infty$ wenn $a > 0$
- $-a\cdot c \to +\infty$ wenn $a < 0$

▶ 11

somit:

für $a > 0$: $\lim_{c\to\infty} \int_{-a\cdot c}^{a\cdot c} \ldots du = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots du$ ← Reihenfolge korrekt

für $a < 0$: $\lim_{c\to\infty} \int_{-a\cdot c}^{a\cdot c} \ldots du = \int_{\infty}^{-\infty} \ldots du = -1\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \ldots du$ ← Reihenfolge falsch ⇒ Kompensation

▶ 12

Dr. rer. nat. M. Strübel

1. Fall: $a > 0$

$$\mathcal{F}\{f(a\cdot t)\} = \lim_{c\to\infty} \int_{-a\cdot c}^{a\cdot c} f(u)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot\frac{u}{a}}\,\frac{1}{a}\,du \qquad \text{mit } u = a\cdot t$$

▶ 11

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-j\cdot\frac{\omega}{a}\cdot u}\,du \qquad = \frac{1}{|a|}$$

▶ 13

2. Fall: $a < 0$

$$\mathcal{F}\{f(a\cdot t)\} = \lim_{c\to\infty} -1\cdot \int_{a\cdot c}^{-a\cdot c} f(u)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot\frac{u}{a}}\,\frac{1}{a}\,du \qquad \text{mit } u = a\cdot t$$

$$= -1\cdot\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-j\cdot\frac{\omega}{a}\cdot u}\,du \qquad = \frac{1}{|a|}$$

▶ 12

wegen: $|a| = \begin{cases} a & \text{, wenn } a > 0 \\ -a & \text{, wenn } a < 0 \end{cases}$ ist $\quad a = |a|$ wenn $a > 0$, $\quad -a = |a|$ wenn $a < 0$ $\quad$ also $\quad \frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}$ $(a>0)$, $\quad -\frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}$ $(a<0)$

somit entsteht die Zusammenführung

$$\mathcal{F}\{f(a\cdot t)\} = \frac{1}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-j\cdot\frac{\omega}{a}u}\,du = \frac{1}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\cdot\frac{\omega}{a}\cdot t}\,dt$$

Substitution $t = u \Rightarrow du = dt$

▶ 13

$$= F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

d.h. $f(a\cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ falls $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ (#)

- 1. Differentiationssatz

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet j\cdot\omega\cdot F(\omega) \quad \text{und} \quad f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (j\omega)^n\cdot F(\omega)$$

▶ 14

⚠ 1. Differentiationssatz besagt:
aus Ableitungen im Zeitbereich werden Multiplikationen im Frequenzbereich

Nachweis

bekannt ist: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\,dt = \mathcal{F}\{f(t)\}$

▶ 15

$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$

damit ist

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt \overset{CH.}{=} \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} f'(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(f(t)\cdot e^{-j\omega t}\Big|_{-c}^{c} - \int_{-c}^{c}(-j\omega)\,f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt\right)$$

partielle Int.
$u' = f \Rightarrow u = f$
$v = e^{-j\omega t} \Rightarrow v' = -j\cdot\omega\cdot e^{-j\omega t}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$$= \lim_{c\to\infty} \left(\underbrace{f(c)}_{\to 0} \cdot e^{-j\omega c} - \underbrace{f(-c)}_{\to 0} e^{-j\omega c} \right) + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= F(\omega)$$

Grundvoraussetzung für Existenz von $\mathcal{F}\{f(t)\}$:

$\lim_{c\to\infty} f(c) = 0 \;\wedge\; \lim_{c\to-\infty} f(c) = 0$

d.h. „ f verschwindet im Unendlichen "

$$= (j\omega)\ F(\omega)$$

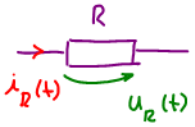
d.h. $f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (j\omega) \cdot F(\omega)$ wenn $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$

und weiter: $\cdot\ f''(t) = \frac{d}{dt} f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (j\omega)(j\omega) \cdot F(\omega) = (j\omega)^2 \cdot F(\omega)$

$\cdot\ f^{(3)}(t) = \frac{d}{dt} f^{(2)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (j\omega) \cdot (j\omega)^2 \cdot F(\omega) = (j\omega)^3 \cdot F(\omega)$

insgesamt: $f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (j\omega)^n \cdot F(\omega)$

Beispiel – Wechselstromwiderstand / Impedanz



▶ 16

zeitabhängig: $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$

$\downarrow$ $U_R(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ u_R(t)$, $I_R(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ i_R(t)$

frequenzabhängig:

$$U_R(\omega) = R \cdot I_R(\omega)$$

damit Impedanz: $Z_R(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{I_R(\omega)} = \frac{R \cdot \cancel{I_R(\omega)}}{\cancel{I_R(\omega)}} = R$

zeitabhängig: $i_c(t) = C \cdot u_c'(t)$

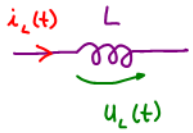
$\downarrow$ $I_c(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ i_c(t)$, $U_c(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ u_c(t)$

frequenzabhängig:

$I_c(\omega) = C \cdot j\omega \cdot U_c(\omega)$ (Differentiationssatz)

damit Impedanz: $Z_c(\omega) = \frac{U_c(\omega)}{I_c(\omega)} = \frac{\cancel{U_c(\omega)}}{C \cdot j\omega \cdot \cancel{U_c(\omega)}} = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot j}$

Dr. rer. nat. M. Striebel



zeitabhängig: $u_L(t) = L \cdot i_L'(t)$

$\downarrow$ $u_L(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet u_L(t)$, $I_L(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet i_L(t)$

frequenzabhängig: $U_L(\omega) = L \cdot j\omega \cdot I_L(\omega)$ 1. Differentiationssatz

damit Impedanz: $Z_L(\omega) = \frac{U_L(\omega)}{I_L(\omega)} = \frac{L \cdot j\omega \cdot I_L(\omega)}{I_L(\omega)} = \omega \cdot L \cdot j$

- **Vertauschungssatz** ▶ 17

$F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi \cdot f(-\omega)$ zur Gewinnung weiterer Korrespondenzen

Beispiel

$\mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} =$? ▶ 18

nach Tabelle gilt:

$2 \cdot 1 \cdot \text{sinc}(1 \cdot \omega) \circ\!\!-\!\!\bullet G(t+1) - G(t-1)$

d.h. $\text{sinc}(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}(G(t+1) - G(t-1))$

$= F(\omega)$ $= f(t)$

$\mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = \mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi \cdot f(-\omega)$ (Vertauschungssatz)

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1	$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$\sigma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a+j\omega}\ (a>0)$
$\frac{1}{2a}e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{1}{\omega^2+a^2}$	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\frac{t}{t^2+a^2}$	$-j\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}\text{sign}(\omega)$
$\sigma(t+a)-\sigma(t-a)$	$\frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = 2a\,\text{sinc}(a\omega)$	tri_a	$a^2\,\text{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$
$\sin(at)$	$j\pi(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$	$\cos(at)$	$\pi(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$

Sinc(ω) auf der „falschen" Seite ☺

$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}(G(-\omega+1) - G(-\omega-1))$

$= \pi \cdot (G(1-\omega) - G(-1-\omega))$

$= \pi \cdot \left(\begin{cases} 0, & 1-\omega < 0 \\ 1, & 1-\omega \geq 0 \end{cases} - \begin{cases} 0, & -1-\omega < 0 \\ 1, & -1-\omega \geq 0 \end{cases}\right)$

$= \pi \cdot \left(\begin{cases} 0, & \omega > 1 \\ 1, & \omega \leq 1 \end{cases} - \begin{cases} 0, & \omega > -1 \\ 1, & \omega \leq -1 \end{cases}\right)$

$= \pi \cdot \left(\begin{cases} 1-1, & \omega > 1 \\ 1-0, & \omega \leq 1 \end{cases} - \begin{cases} 1-1, & \omega > -1 \\ 1-0, & \omega \leq -1 \end{cases}\right)$

$= \pi \cdot \left(\left(1 - \begin{cases} 1, & \omega > 1 \\ 0, & \omega \leq 1 \end{cases}\right) - \left(1 - \begin{cases} 1, & \omega > -1 \\ 0, & \omega \leq -1 \end{cases}\right)\right)$

$= G(\omega-1)$ $= G(\omega+1)$

$= \pi \cdot ((1 - G(\omega-1)) - (1 - G(\omega+1))) = \pi \cdot (1 - G(\omega-1) - 1 + G(\omega+1))$

$= \pi \cdot (G(\omega+1) - G(\omega-1))$

$\Rightarrow$ $\text{Sinc}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \pi \cdot (G(\omega+1) - G(\omega-1))$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Nachweis:

▶ 19

bekannt : $F(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet\, f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$ (angenommen f ist stetig)

damit : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = f(t)$

$\downarrow$ $t \leftrightarrow \omega$ ausgetauscht

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{j \cdot t\omega}\, dt = f(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\, dt = 2\pi \cdot f(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-j(-\omega)t}\, dt = 2\pi \cdot f(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t}\, dt = 2\pi \cdot f(-\omega)$$

$= \mathcal{F}\{F(t)\}$

somit : $F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi \cdot f(-\omega)$ falls $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$ (#)

- **Faltungssatz**

$(f_1 * f_2)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$ und $f_1(t) \cdot f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2\pi} (F_1 * F_2)(\omega)$

▶ 20

⚠ es ist nicht : $f_1(t) \cdot f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

zur Faltung:

Definition (Faltung)

Für $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennt man

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) \cdot f_2(u)\, du$$

die Faltung von f_1 und f_2

▶ 21

Bemerkung:

sind f_1, f_2 kausal, d.h. $f_i(t) = 0$ für $t < 0$ dann ist

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{0}^{t} f_1(t-u) \cdot f_2(u)\, du$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiel

$f(t) = G(t+1) - G(t-1)$

$$\Rightarrow (f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(G((t-u)+1) - G((t-u)-1)\big) \cdot \big(G(u+1) - G(u-1)\big)\, du$$

$$= \int_{-1}^{1} \big(G((t-u)+1) - G((t-u)-1)\big)\, du$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} G(t-u+1)\, du}_{=: I_1} - \underbrace{\int_{-1}^{1} G(t-u-1)\, du}_{=: I_2}$$

mit $I_1 = \int_{-1}^{1} G(t-u+1)\, du$

$$\uparrow_t = \begin{cases} 0, & t-u+1 < 0 \\ 1, & t-u+1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & u > t+1 \\ 1, & u \leq t+1 \end{cases}$$

1. Fall: $t+1 < -1 \Leftrightarrow t < -2$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} 0\, du = 0$$

2. Fall: $-1 \leq t+1 < 1 \Leftrightarrow -2 \leq t < 0$

$$I_1 = \int_{-1}^{t+1} 1\, du = u\Big|_{-1}^{t+1} = t+1-(-1) = t+2$$

3. Fall: $t+1 \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} 1\, du = u\Big|_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2$$

mit $I_2 = \int_{-1}^{1} G(t-u-1)\, du$

$$\uparrow_t = \begin{cases} 0, & t-u-1 < 0 \\ 1, & t-u-1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & u > t-1 \\ 1, & u \leq t-1 \end{cases}$$

1. Fall: $t-1 < -1 \Leftrightarrow t < 0$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} 0\, du = 0$$

2. Fall: $-1 \leq t-1 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq t < 2$

$$I_2 = \int_{-1}^{t-1} 1\, du = u\Big|_{-1}^{t-1} = t-1-(-1) = t$$

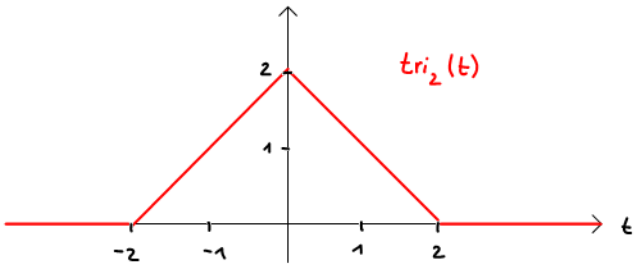
3. Fall: $t-1 \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 2$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} 1\, du = u\Big|_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

somit $(f*f)(t) = I_1 - I_2 = \begin{cases} 0 & , t<-2 \\ t+2 & , -2 \le t<0 \\ 2 & , t \ge 0 \end{cases} - \begin{cases} 0 & , t<0 \\ t & , 0 \le t<2 \\ 2 & , t \ge 2 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0-0 & , t<-2 \\ t+2-0 & , -2 \le t<0 \\ 2-t & , 0 \le t<2 \\ 2-2 & , t \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , t<-2 \\ t+2 & , -2 \le t<0 \\ -t+2 & , 0 \le t<2 \\ 0 & , t \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 2-|t| & , |t| \le 2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$



Anwendung des Faltungssatzes

▶ 23

$f(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\,\mathrm{sinc}(\omega)$

somit $(f*f)(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (2\cdot \mathrm{sinc}(\omega))\cdot(2\cdot \mathrm{sinc}(\omega)) = \underbrace{4\cdot \mathrm{sinc}^2(\omega)}$

$= 2^2 \cdot \mathrm{sinc}^2\left(2\frac{\omega}{2}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad tri_2(t)$

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1	$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$\sigma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a+j\omega}\ (a>0)$
$\frac{1}{2a}e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{1}{\omega^2+a^2}$	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\frac{t}{t^2+a^2}$	$-j\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}\mathrm{sign}(\omega)$
$\sigma(t+a)-\sigma(t-a)$	$\frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = 2a\,\mathrm{sinc}(a\,\omega)$	tri_a	$a^2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\,\omega}{2}\right)$
$\sin(at)$	$j\pi(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$	$\cos(at)$	$\pi(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$

Dr. rer. nat. M. Striebel