Linearität	$\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \alpha \cdot F_1(\omega) + \beta \cdot F_2(\omega)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot F(\frac{\omega}{a})$ für $a \neq 0$
Verschiebungssatz	$f(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-j\omega t_0} F(\omega)$ für $t_0 \in \mathbb{R}$
Dämpfungssatz	$e^{j\omega_0 t} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega - \omega_0)$ für $\omega_0 \in \mathbb{R}$
1. Differentiationssatz	$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, j\omega F(\omega)$ & $f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, (j\omega)^n F(\omega)$
2. Differentiationssatz	$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, j^n F^{(n)}(\omega)$
1.Integrationssatz	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{j\omega} F(\omega)$ falls $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$
2. Integrationssatz	$\int_a^b F(\omega)\,d\omega \bullet\!\!-\!\!\circ\, j\,(g(b) - g(a))$ mit $g(t) = \frac{f(t)}{t}$
Vertauschungssatz	$F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi \cdot f(-\omega)$
Faltungssatz	$f_1 * f_2 \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1 \cdot F_2$ & $f_1 \cdot f_2 \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2\pi} F_1 * F_2$

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
✓ $\delta(t)$	1	$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
✓ 1	$2\pi\delta(\omega)$	$\sigma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a + j\omega}$ $(a > 0)$
$\frac{1}{2a} e^{-a\lvert t \rvert}$	$\frac{1}{\omega^2 + a^2}$	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega - a)$ ✓
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\frac{t}{t^2 + a^2}$	$-j\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}\mathrm{sign}(\omega)$
$\sigma(t + a) - \sigma(t - a)$	$\frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$	tri_a	$a^2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\,\omega}{2}\right)$
$\sin(at)$	$j\pi\,(\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a))$ ✓	$\cos(at)$	$\pi\,(\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a))$ ✓

▶ 7

Verallgemeinerte Korrespondenzen

▶ 1

- Zur Fourier-Transformation des Dirac-Impulses

▶ 2

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{=: f(t)}\, dt = f(0) = e^{-j\omega \cdot 0} = e^0 = 1 \quad \text{somit} \quad \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1 = F_\delta(\omega)$$

Abtastergenschaft des Dirac-Impulses

d.h. Amplitudenspektrum des Impulses δ: $|F_\delta(\omega)| = 1$

Interpretation: Dirac-Impuls enthält alle Frequenzen mit gleicher Gewichtung.
(vgl. weisses Rauschen)

- mit Vertauschungssatz folgt: $1 = F_\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi \cdot \delta(-\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega)$

▶ 3

↑ Symmetrie des Dirac Impulses

somit: $1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi \cdot \delta(\omega) = F_1(\omega)$

- mit **Dämpfungssatz** $e^{j\omega_0 t} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega - \omega_0)$ für $\omega_0 \in \mathbb{R}$ folgt:

▶ 4

für $a \in \mathbb{R}$: $e^{j \cdot a \cdot t} = e^{j \cdot a \cdot t} \cdot \underbrace{1}_{F_1(\omega)} \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1(\omega - a) = 2\pi \cdot \delta(\omega - a)$

- mit $\sin(at) = \frac{e^{j \cdot a \cdot t} - e^{-jat}}{2j}$ und der Linearität der Fourier-Transformation folgt

▶ 5

$$\sin(at) = \frac{1}{2j}\left(e^{j \cdot a \cdot t} - e^{-jat}\right) = -\frac{j}{2}\left(e^{jat} - e^{j(-a) \cdot t}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet\, -\frac{j}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega - a) - 2\pi \cdot \delta(\omega - (-a))\right) = j \cdot \pi\left(\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)\right)$$

- mit $\cos(at) = \frac{e^{j \cdot a \cdot t} + e^{-jat}}{2}$ und der Linearität der Fourier-Transformation folgt

$$\cos(at) = \frac{1}{2}\left(e^{jat} + e^{j(-a)t}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega - a) + 2\pi\,\delta(\omega + a)\right) = \pi \cdot \left(\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)\right)$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Interpretation der Sinus- & Cosinus-Korrespondenzen

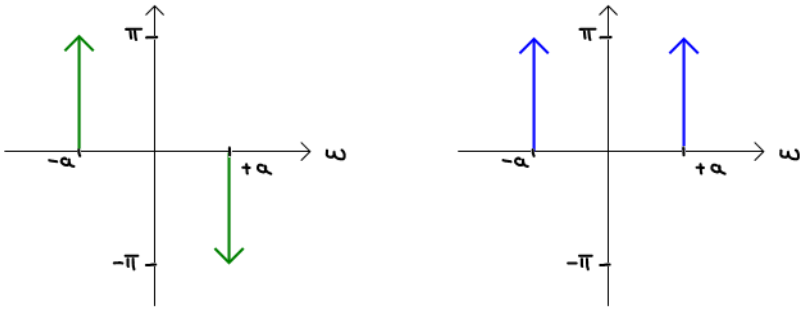
▶ 6

$$\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\; j\pi\,(\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)) \qquad \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \pi\,(\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a))$$

Amplitudenspektren:

Sinus: $\pi\,(\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)) = \pi\cdot\delta(\omega+a) - \pi\cdot\delta(\omega-a)$

Cosinus: $\pi\,(\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)) = \pi\cdot\delta(\omega+a) + \pi\cdot\delta(\omega-a)$



Sinus und Cosinus enthalten nur die Frequenzen $-a$ & $+a$

Fouriertransformation periodischer Funktionen

▶ 8

vereinfachende Annahme:

gegeben sei eine T-periodische stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)$

Somit ist f darstellbar als Fourier-Reihe:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{und } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

daher gilt für die Fourier-Transformation

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot F_k(\omega) \quad \text{mit} \quad e^{jk\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet F_k(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega - k\cdot\omega_0)$$

d.h. $$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega - k\cdot\omega_0) \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

$\delta(\omega - k\cdot\omega_0) = 0$ wenn $\omega - k\cdot\omega_0 \neq 0$

$= 0$ wenn $\omega \neq k\cdot\omega_0$

$F(\omega)$

Interpretation: f enthält nur Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ω sind

$\Rightarrow |F(\omega)| = 0$ wenn $\omega \neq k\cdot\omega_0$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

d.h. Amplitudenspektrum ist ein Linienspektrum.

Dr. rer. nat. M. Striebel