▶ 1 im Video: Zielsetzung der Lehrveranstaltung OR

Operations Research – Modellbildung ▶ 2

Zielsetzung: Bereitstellung eines quantitativen Modells der Art

$$\begin{cases} \text{optimiere} \quad F(x) \\ \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad x \in \mathcal{M} \end{cases}$$

mit gegebenen $F: V \to W$ & $\mathcal{M}$

? x, $F(x)$, $\mathcal{M}$

ausgehend von einem qualitativen Modell

(ernüchternde) Beobachtungen:

- Die Modellierung ist i.A. nicht unkompliziert und erfordert anwendungsbezogene und mathematische Kompetenzen (insbesondere: Fähigkeit zur Abstraktion, Gewichtung, Bewertung)
- Nebenbedingungen sind zumeist implizit gegeben
- Zielfunktion kann implizit gegeben sein.

Beispiele für qualitative Modelle: ▶ 3

i) Produktionsplanung ▶ 4

aus [Koop A., Moock H., *Lineare Optimierung -- eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research*, Springer Spektrum Berlin, 2. Auflage, 2018]

In einem Betrieb seien drei Maschinen vorhanden, die für die Fertigstellung von zwei verschiedenen Produkten benötigt werden. Jedes der beiden Produkte benötigt auf den Maschinen jeweils unterschiedliche Bearbeitungszeiten (in Minuten) gemäß der folgenden Tabelle:

	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3
Produkt A	40	24	0
Produkt B	24	48	60

Die tägliche Maschinenlaufzeit beträgt 8 Stunden.
Der Ertrag pro Einheit bei Produkt A beträgt 10 € und bei Produkt B 40 €.
Welche Anzahl ist täglich von beiden Produkten zu fertigen, damit der Ertrag maximal wird?

ii) Portfoliooptimierung ▶ 5

Aus mehreren zur Verfügung stehenden Vermögenswerten soll ein Finanzinvestitionsportfolio zusammengestellt werden, dass zugleich die Rendite maximiert und das Risiko kontrolliert wird.

Dr. rer. nat. M. Striebel

iii) Leistungszuteilung in der drahtlosen Kommunikation ▶ 6

Zu optimieren ist die Leistungszuteilung für verschiedene Benutzer in einem drahtlosen Kommunikationssystem, so dass die Gesamtdatenrate maximiert wird, dabei aber Leistungsbeschränkungen beachtet werden.

iv) Kraftwerkseinsatzoptimierung ▶ 7

Gesucht ist ein kostenoptimaler Plan zur Zu- und Abschaltung unterschiedlicher Kraftwerke, zur Deckung des Strombedarfes und Wahrung betrieblicher Einschränkungen

v) Arbeitspunkteinstellung eines Transistors ▶ 8

Gesucht ist der optimale Arbeitspunkt eines Bipolartransistors zur Maximierung der Verstärkung und Minimierung der Verlustleistung

vi) Zuteilung medizinischer Ressourcen in einer Pandemie ▶ 9

Während einer Krankheitswelle sind begrenzt vorhandene medizinische Ressourcen so zu zuweisen, dass die Anzahl gleichzeitig Erkrankter möglichst klein gehalten wird.

prinzipielle Schritte der Modellbildung: (einfacher Fall) ▶ 10

1.) Bezeichnungen einführen für
   - Entscheidungsvariablen (evtl. zusätzliche Hilfsvariablen)
   - Parameter (möglichst bereits in Form von Zahlenwerten)
2.) prinzipielle Einschränkungen für die Entscheidungsvariablen erkennen
3.) Zielfunktion definieren
4.) Optimierungsart klären: maximieren oder minimieren
5.) Nebenbedingungen / Restriktionen definieren

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispielhafte, ausführlich dargestellte Überführung eines qualitativen Modells in ein quantitatives Modell:

Produktionsplanung

aus [Koop A., Moock H., *Lineare Optimierung -- eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research*, Springer Spektrum Berlin, 2. Auflage, 2018]

▶ 11

In einem Betrieb seien drei Maschinen vorhanden, die für die Fertigstellung von zwei verschiedenen Produkten benötigt werden. Jedes der beiden Produkte benötigt auf den Maschinen jeweils unterschiedliche Bearbeitungszeiten (in Minuten) gemäß der folgenden Tabelle:

	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3
Produkt A	40	24	0
Produkt B	24	48	60

Prinzipielle Schritte der Modellbildung:

1.) Bezeichnungen einführen für
- Entscheidungsvariablen
- Parameter (möglichst bereits in Form von Zahlenwerten)

2.) prinzipielle Einschränkungen für die Entscheidungsvariablen erkennen

3.) Zielfunktion definieren

4.) Optimierungsart klären: maximieren oder minimieren?

5.) Nebenbedingungen / Restriktionen definieren

✓ 480 Minuten

Die tägliche Maschinenlaufzeit beträgt 8 Stunden.

Der Ertrag pro Einheit bei Produkt A beträgt 10 € und bei Produkt B 40 €.

Welche Anzahl ist täglich von beiden Produkten zu fertigen, damit der Ertrag maximal wird?

zu 1.) Entscheidungsvariablen

$x_1 \mathrel{\hat{=}}$ Einheiten von Produkt A ▶ 12

$x_2 \mathrel{\hat{=}}$ Einheiten von Produkt B

zu 2.) prinzipielle Einschränkungen: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (keine negative Produktion) ▶ 13

vereinfachend sei angenommen: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

evtl. aber gefordert: $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ (Ganzzahligkeitsforderung)

zu 4.) Optimierungsart: maximiere ▶ 14

zu 3.) Zielfunktion: ▶ 15

$$F(x_1, x_2) = 10\,x_1 + 40\,x_2$$

zu 1.) Parameter der Zielfunktion: $c_1 = 10$, $c_2 = 40$ somit: $F(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ ▶ 16

zu 5.) Restriktionen: ▶ 17

$40\,x_1 + 24\,x_2 \leq 480$ (maximale Laufzeit Maschine 1)

$24\,x_1 + 48\,x_2 \leq 480$ (maximale Laufzeit Maschine 2)

$0\,x_1 + 60\,x_2 \leq 480$ (maximale Laufzeit Maschine 3)

zu 1.) Parameter der Nebenbedingungen: ▶ 18

$a_{11} = 40$, $a_{12} = 24$, $b_1 = 480$

$a_{21} = 24$, $a_{22} = 48$, $b_2 = 480$ & somit: $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i$ für $i = 1,2,3$

$a_{31} = 0$, $a_{32} = 60$, $b_3 = 480$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Somit ergibt sich das quantitative Modell: ▶ 19

$$\begin{cases} \max \quad F(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad 40x_1 + 24x_2 \leq 480 \\ \qquad\quad 24x_1 + 48x_2 \leq 480 \\ \qquad\quad 0x_1 + 60x_2 \leq 480 \\ \qquad\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

u.d.N. bedeutet: „unter den Nebenbedingungen"

alternative Schreibweise (Matrix-Vektor-Notation):

$$\begin{cases} \max \quad F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}^T \cdot \vec{x} \qquad \text{mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{u.d.N} \quad \begin{pmatrix} 40 & 24 \\ 24 & 48 \\ 0 & 60 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 480 \\ 480 \\ 480 \end{pmatrix} \\ \qquad\quad \vec{x} \geq \vec{0} \end{cases}$$

▶ 20

⚠ Vergleiche „≤" & „≥" komponentenweise zu verstehen ▶ 21

Weitere Beispiele quantitativer Modelle im Operations Research ▶ 22

ii) Portfoliooptimierung ▶ 23

Aus mehreren zur Verfügung stehenden Vermögenswerten soll ein Finanzinvestitionsportfolio zusammengestellt werden, dass zugleich die Rendite maximiert und das Risiko kontrolliert wird.

Variablen:
- $x_1, \dots, x_N$ ≙ erworbene Anteile der Vermögenswerte $1, \dots, N$

Parameter:
- N ≙ Anzahl zur Auswahl stehender Vermögenswerte
- p_i ≙ Preis des i-ten Vermögenswertes $(i \in \{1, \dots, N\})$
- r_i ≙ erwartete Rendite des i-ten Vermögenswertes $(i \in \{1, \dots, N\})$
- B ≙ zur Verfügung stehendes Budget
- m, M ≙ Mindest- & Höchstanzahl von zu erwerbenden Anteilen
- $Cov(i,j)$ ≙ Kovarianz der Vermögenswerte i und j $(i,j \in \{1, \dots, N\})$
- λ ≙ Risikoaversionsparameter

Beschränkungen:
- Gesamtinvestition ist durch Gesamtbudget beschränkt

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i \leq B$$

- minimale und maximale Paketgrößen sind zu beachten:

$$m \leq x_i \leq M \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

- Investitionsanteile können nicht negativ sein:

$$x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\}$$

μ-σ^2-Prinzip
Erwartungswert-Varianz-Prinzip

Ziel: maximiere $F(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot r_i - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i \cdot x_j \cdot \mathrm{Cov}(i,j)$

- $\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot r_i$: erwartete Rendite der Entscheidung $(x_1, \dots, x_N)$
- λ: Maß für Risikobereitschaft
- $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i \cdot x_j \cdot \mathrm{Cov}(i,j)$: Maß für das Risiko der Entscheidung $(x_1, \dots, x_N)$

insgesamt ergibt sich das Optimierungsproblem

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot r_i - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i \cdot x_j \cdot \mathrm{Cov}(i,j) \\ \text{u.d.N.} & \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i \leq B \\ & m \leq x_i \leq M \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\} \\ & x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\} \end{cases}$$

iii) Leistungszuteilung in der drahtlosen Kommunikation

▶ 24

Zu optimieren ist die Leistungszuteilung für verschiedene Benutzer in einem drahtlosen Kommunikationssystem, so dass die Gesamtdatenrate maximiert wird, dabei aber Leistungsbeschränkungen beachtet werden.

Variablen:
- $p_1, \dots, p_N \;\hat{=}$ Nutzer $1, \dots, N$ zugewiesene Leistung

Parameter:
- $N \;\hat{=}$ Anzahl der Nutzer des Kommunikationssystems
- $h_i \;\hat{=}$ Kanalverstärkung für Nutzer i $(i \in \{1, \dots, N\})$
- $\sigma^2 \;\hat{=}$ Rauschleistung
- $P_{total} \;\hat{=}$ Gesamtleistungsbeschränkung
- $q_i, Q_i \;\hat{=}$ minimale & maximale Leistung für Nutzer i $(i \in \{1, \dots, N\})$

Beschränkungen:
- Leistung kann bei keinem Nutzer negativ sein:

$$p_i \geq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\}$$

- Wahrung oberer und unterer Leistungsgrenzen bei jedem Nutzer:

$$q_i \leq p_i \leq Q_i \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\}$$

- insgesamt zugeteilte Leistung ist begrenzt

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \leq P_{total}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Signal-Rausch-Verhältnis (SNR)

Ziel: maximiere $F(P_1, \dots, P_N) = \sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(1 + \frac{P_i \cdot h_i}{\sigma^2}\right)$

↑ Datenübertragungsrate nach Shannon-Hartley-Gesetz

insgesamt ergibt sich:

$$\begin{cases} \text{maximiere} & F(P_1, \dots, P_N) = \sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(1 + \frac{P_i \cdot h_i}{\sigma^2}\right) \\ \text{u.d.N.} & \sum_{i=1}^{N} P_i \leq P_{total} \\ & q_i \leq P_i \leq Q_i \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\} \\ & P_i \geq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\} \end{cases}$$

IV) Kraftwerkseinsatzoptimierung ▶ 25

Gesucht ist ein kostenoptimaler Plan zur Zu- und Abschaltung unterschiedlicher Kraftwerke, zur Deckung des Strombedarfes und Wahrung betrieblicher Einschränkungen

vereinfachende Annahmen:

- N Kraftwerke, d. h. $i \in \{1, \dots, N\}$ seien involviert
- die Zeit wird in M Zeitintervallen gemessen, d. h. $t \in \{t_1, \dots, t_M\}$

Variablen

- $u_i(t)$: Zustand von Kraftwerk i zum Zeitpunkt t: $u_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls Kraftwerk i EIN} \\ 0 & \text{falls Kraftwerk i AUS} \end{cases}$
- $P_i(t)$: Leistungsabgabe der Einheit i zum Zeitpunkt t, wenn sie eingeschaltet ist.

Einschränkungen:

1. Zustand ist binär, d. h. $u_i(t) \in \{0, 1\}$
2. positive Leistungsabgabe verlangt, d. h. $P_i(t) \geq 0$
3. Nachfragebeschränkung: Die insgesamt erzeugte Leistung sollte den Strombedarf in jedem Zeitintervall decken:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t) \cdot P_i(t) \geq D(t).$$

Parameterfunktion: Strombedarf im Intervall t

↖ nichtlineare Beziehung der Variablen in einer Nebenbedingung

4. Minimale Ein- und Auszeiten: Einheiten benötigen Mindestzeiten im eingeschalteten und im ausgeschalteten Zustand

iterativer Charakter → $u_i(t) - u_i(t-1) \leq \Delta u_i(t)$ ← gibt an, ob Kraftwerk i im Übergang vom Zeitintervall $t-1$ zum Intervall t den Zustand ändern darf

5. Erzeugungsgrenzen: Die Leistungsabgabe jeder Einheit sollte innerhalb ihrer minimalen und maximalen Grenzen liegen.

$$P^i_{min} \cdot u_i(t) \leq P_i(t) \leq P^i_{max} \cdot u_i(t)$$

6. Rampengeschwindigkeitsgrenzen: Die Geschwindigkeit, mit der sich die Leistung einer Einheit ändern kann, ist begrenzt.

$$|P_i(t) - P_i(t-1)| \leq \Delta P^i_{max}$$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Ziel: Zu minimieren sind die Gesamterzeugungskosten, die eine nichtlineare Funktion der Leistungsabgabe und des Gerätestatus sind:

$$\text{minimiere} \quad \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} u_i(t_k) \cdot C_i(P_i(t_k))$$

Dabei ist $C_i(P_i(t))$ die Kostenfunktion, die der Einheit i zur Erzeugung der Leistung $P_i(t)$ zugeordnet ist.

i. A. nichtlinear

insgesamt ergibt sich:

$$\begin{cases} \text{minimiere} & \displaystyle\sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} u_i(t_k) \cdot C_i(P_i(t_k)) \\ \text{u.d.N} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_i(t) \cdot P_i(t) \geq D(t) \\ & u_i(t) - u_i(t-1) \leq \Delta u_i(t) \quad \forall i, \forall t \\ & P^i_{\text{min}} \cdot u_i(t) \leq P_i(t) \leq P^i_{\text{max}} \cdot u_i(t) \quad \forall i, \forall t \\ & |P_i(t) - P_i(t-1)| \leq \Delta P^i_{\text{max}} \quad \forall i, \forall t \\ & u_i(t) \in \{0,1\} \quad \forall i, \forall t \\ & P_i(t) \geq 0 \quad \forall i, \forall t \end{cases}$$

vi) Zuteilung medizinischer Ressourcen in einer Pandemie ▶ 26

Während einer Krankheitswelle sind begrenzt vorhandene medizinische Ressourcen so zu zuweisen, dass die Anzahl gleichzeitig Erkrankter möglichst klein gehalten wird.

Variablen: – hier nicht Entscheidungsgrößen !!

- $S(t)$: Anfällige Population zum Zeitpunkt t.
- $I(t)$: Infizierte Bevölkerung zum Zeitpunkt t.
- $R(t)$: Gesundete/immune Bevölkerung zum Zeitpunkt t.

Einschränkungen:

1. Epidemiedynamik: Die Bevölkerung verändert sich im Laufe der Zeit basierend auf einem vereinfachten SIR-Modell (Susceptible-Infectious-Recovered). Die Differentialgleichungen, die die Dynamik beschreiben, sind:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ R'(t) &= \gamma \cdot I(t) \end{aligned}$$

mit den Parametern

- β: Übertragungsrate der Krankheit.
- γ ist die Gesundungsrate.

und gegebenen Anfangswerten $S(0), I(0), R(0)$

Dr. rer. nat. M. Striebel

2. Ressourcenbeschränkungen: Die Verfügbarkeit medizinischer Ressourcen begrenzt die Behandlungs- und Genesungsrate.

$$I'(t) \leq \delta \cdot M(t)$$

← medizinische Versorgung begrenzt das Wachstum der Infiziertenzahlen

mit den Parametern

- $M(t)$: Verfügbarkeit medizinischer Ressourcen zum Zeitpunkt t.
- δ: Behandlungsrate.

↑ Entscheidungsvariablen

Ziel: Zu minimieren sind die Auswirkungen der Epidemie, die durch die höchste infizierte Bevölkerung repräsentiert wird

← über Zeitraum $[0, T]$ (d.h. $\max_{t \in [0,T]} (I(t))$)

$$\text{minimiere } (\max(I(t)))$$

↑ durch Zuweisung von $M(t)$ und δ

insgesamt ergibt sich:

$$\begin{cases} \text{minimiere} & \max(I(t)) \\ \text{u.d.N} & S'(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ & I'(t) = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ & R'(t) = \gamma \cdot I(t) \\ & I'(t) \leq \delta \cdot M(t) \\ & \text{bei gegebener Anfangssituation } S(0), I(0), R(0) \end{cases}$$

Fazit: Es gibt sehr viele verschiedenartige Fragestellungen im OR. Für jede unterschiedliche Klasse von Problemstellung sucht das OR passende Lösungen.

Dr. rer. nat. M. Striebel