„Menge"

- Definitionsmenge, Zielmenge
- Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$)

  Menge der natürlichen ($\mathbb{N}$) / ganzen ($\mathbb{Z}$) / rationalen ($\mathbb{Q}$) / komplexen ($\mathbb{C}$) Zahlen

Grundlagen der Mengenlehre

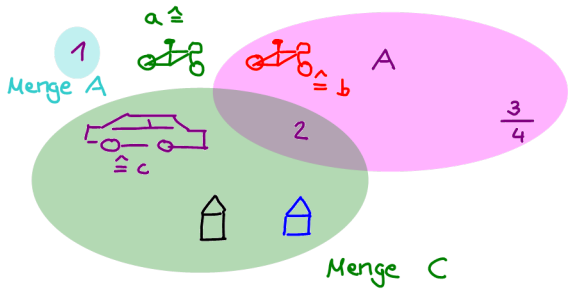
Definition (Menge und ihre Elemente)

Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem neuen einheitlichen Ganzen.

Ein Objekt, das zur Menge gehört, wird *Element der Menge* genannt.

▶ 1

Beispiel:



hier z.B.
- $1 \in A$
- $1 \notin B$
- $\in B$
- $2 \in B$
- $2 \in C$

$B = \{$ $, A, 2, \frac{3}{4} \}$

$A = \{ 1 \}$

Bemerkungen:

i) Mengen werden i.A. durch Großbuchstaben gekennzeichnet

ii) Objekte / Elemente werden i.A. durch Kleinbuchstaben symbolisiert.

iii) Symbolik: Element-von-Zeichen: $\in$

Ist ein Objekt a Element einer Menge M, so schreibt man: $a \in M$

sprich: „a ist Element von M"

Ist ein Objekt a nicht Element der Menge M, d.h. ist a nicht in M enthalten, dann schreibt man: $a \notin M$

sprich: „a ist nicht Element von M"

man sieht mitunter auch: $M \ni a$ bzw. $M \not\ni a$

das bedeutet: a ist Element von M bzw. a ist nicht Element von M

es wird verwendet um auszudrücken:

- M umfasst / enthält das Objekt a

bzw M umfasst / enthält das Objekt a nicht

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beschreibung / Definition / Festlegung von Mengen

▶ 2

Die Zusammenfassung von Objekten wird symbolisiert durch ein Paar von geschweiften Klammern { }, d.h.

Menge := { Elemente der Menge }

↳ explizite Angabe: Aufzählung der Elemente

z.B: A := { 1, 2, 7, 11 }

B := { rot, grün, blau }

↳ implizite Angabe: Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft (*)

z.B.: D := { natürliche Zahl größer als Null die gerade ist }

explizite Angabe von D := { 2, 4, 6, 8, 10, ... }

F := { Person ist größer als 1,60 m }

(*) Formalisierung mittels mathematischer Symbole & Abkürzungen (+ Aussagenlogik)

Liste mathematischer Symbole

Auswahl von Symbolen & Abkürzungen:

| ≙ „für die gilt"

∀ ≙ „für alle" (Allquantor)

∃ ≙ „es existiert" („es gibt") (Existenzquantor)

ℕ ≙ Menge der natürlichen Zahlen (mit ℕ = { 1, 2, 3, 4, 5, ... })

∧ ≙ logisches „und"

∨ ≙ logisches „oder"

¬ ≙ logische Verneinung

⟺ ≙ „genau dann wenn"

⇒ ≙ „daraus folgt"

: ≙ „so, dass"

Beispiele zur impliziten Angabe von Mengen:

▶ 3

i) D := { natürliche Zahl größer als Null die gerade ist }

Formalisierung: $D := \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot k \}$

x ist eine natürliche Zahl für die gilt: es gibt eine natürliche Zahl k so dass gilt: x ist gleich 2 mal k

Dr. rer. nat. M. Striebel

z.B.: • für $x = 12$ gilt: $x = 2 \cdot 6$, d.h. die Aussage

„$x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}: x = 2 \cdot k$" ist wahr / richtig (mit $k = 6$)

d.h. $12 \in D$

• 17 lässt sich nicht schreiben als $2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$

(denn $17 = 2 \cdot \frac{17}{2} = 2 \cdot \underbrace{8{,}5}_{\notin \mathbb{N}}$)

d.h. die Aussage

„$17 \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}: 17 = 2 \cdot k$" ist falsch, d.h. $17 \notin D$

ii) $F := \{ p \in \mathbb{N} \mid (p \leq 121) \wedge (\exists n \in \mathbb{N}: p = n^2) \}$ ← implizite Angabe von F

steht für: p ist eine natürliche Zahl für die gilt:

p ist kleiner oder gleich 121 und es existiert eine natürliche Zahl n

so dass p das Quadrat von n ist

• „$p \leq 121$" ist richtig für $p = 1, p = 2, p = 3, \ldots, p = 120$ oder $p = 121$

• „$\exists n \in \mathbb{N}: p = n^2$" ist richtig für $p = 1, p = 4, p = 9, p = 16, \ldots, p = 121, p = 144 \ldots$

denn

$n = 1$	gilt	$n^2 = 1^2 = 1$	$n = 7$	gilt	$n^2 = 7^2 = 49$
$n = 2$	gilt	$n^2 = 2^2 = 4$	$n = 8$	"	$n^2 = 8^2 = 64$
$n = 3$	gilt	$n^2 = 3^2 = 9$	$n = 9$	"	$n^2 = 9^2 = 81$
$n = 4$	"	$n^2 = 4^2 = 16$	$n = 10$	"	$n^2 = 10^2 = 100$
$n = 5$	"	$n^2 = 5^2 = 25$	$n = 11$	"	$n^2 = 11^2 = 121$
$n = 6$	"	$n^2 = 6^2 = 36$	$n = 12$	"	$n^2 = 12^2 = 144$
			⋮		

somit ist $F = \{ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 \}$ ← explizite Angabe von F

iii) $M := \{ m \in \mathbb{N} \mid m < 0 \}$ ← implizite Angabe von M

sprich: M ist die Menge aller natürlichen Zahlen m für die gilt m ist kleiner als 0

da alle natürlichen Zahlen größer als Null sind enthält M kein Element

Man nennt M eine leere Menge und schreibt / symbolisiert

dies als $M = \{\}$ ← explizite Angabe von M

Definition (leere Menge)

Jede Menge, die keine Elemente enthält wird als *leere Menge* bezeichnet.

Symbolisiert wird eine leere Menge durch

$\{\}$ oder $\emptyset$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Spezielle Mengen aus dem Kontext „Zahlen"

▶ 5

- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

  implizite Angabe: $\mathbb{N} := \{ m \mid (m = 1) \vee (\exists n \in \mathbb{N} : m = n + 1) \}$

- Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

  $= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, \dots\}$

  implizite Angabe: $\mathbb{Z} := \{ p \mid (p = 0) \vee (p \in \mathbb{N}) \vee (\exists n \in \mathbb{N} : p = -1 \cdot n) \}$

- Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \neq 0 \}$ (implizite Angabe)

  Beispiel: · da $p = 2 \in \mathbb{Z}$ und $q = -4 \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{2}{-4} \in \mathbb{Q}$ ← identische Werte gleich zu $-\frac{1}{2}$

  · da $p = -2 \in \mathbb{Z}$ und $q = 4 \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{-2}{4} \in \mathbb{Q}$

  · da $p = 1 \in \mathbb{Z}$ und $q = -2 \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{-2} \in \mathbb{Q}$

  aber „$-\frac{1}{2}$" ist nur „einmal" in $\mathbb{Q}$ enthalten.

- Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

allgemeine Bemerkungen

▶ 6

Definition (Menge und ihre Elemente)

Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem neuen einheitlichen Ganzen.

Ein Objekt, das zur Menge gehört, wird *Element der Menge* genannt.

- „wohlunterschiedener Objekte" bedeutet:

  ein Objekt ist Element einer Menge oder nicht, es kann nicht mehrfach Element einer Menge sein.

  Beispiel: mit $\{1, 2, 3, 4, 3\}$ meint man $\{1, 2, 3, 4\}$

  ↑ unzulässige Doppelung von 3

- einem Element einer Menge ist keine Position innerhalb der Menge zugeordnet.

  D.h. es gibt kein erstes, zweites, drittes, ... Element einer Menge

  Beispiel: $\{1, 2, 3, 4\}$ bezeichnet dieselbe Menge wie $\{1, 3, 4, 2\}$

Dr. rer. nat. M. Striebel