Erinnerung :

Definition (Menge und ihre Elemente)

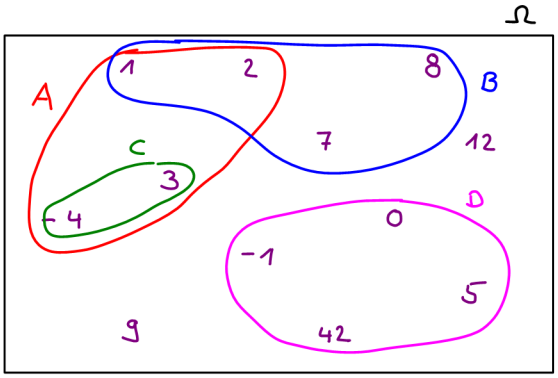
Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem neuen einheitlichen Ganzen.

Ein Objekt, das zur Menge gehört, wird *Element der Menge* genannt.

Liste mathematischer Symbole

Beispiel

i.)



Grundmenge :

Menge aus allen zur Verfügung stehenden Objekten

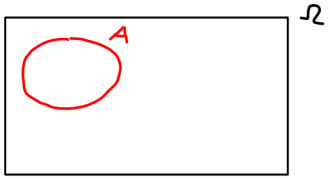
$\Omega := \{1, 2, 8, -4, 3, 7, 12, 9, -1, 0, 42, 5\}$

$A := \{1, 2, 3, -4\}$ $\quad C := \{-4, 3\}$

$B := \{1, 2, 7, 8\}$ $\quad D := \{-1, 0, 42, 5\}$

ii) Grundmenge : $\Omega := \mathbb{R}$ (Menge nicht explizit darstellbar, da die Elemente nicht aufgelistet werden können)

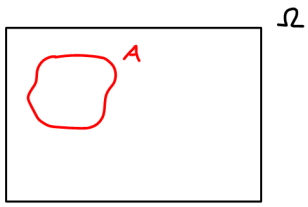
$A := \{x \in \Omega \mid -1 \leq x \leq 1\}$



iii) Grundmenge : $\Omega := \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (Elemente sind aufzählbar aber unendlich viele)

$A := \{n \in \Omega \mid 2 \leq n \leq 6\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6\}$



Dr. rer. nat. M. Striebel

Eigenschaften von Mengen: Abzählbarkeit und Endlichkeit

▶ 1

Man bezeichnet eine Menge als **abzählbare Menge**, wenn alle ihre Elemente einzeln aufgelistet werden können. Ist eine Menge nicht abzählbar, so bezeichnet man sie als **überabzählbare Menge**. Die leere Menge ist (per Definition) abzählbar.

Beispiele:

- $\{\}$ ist abzählbar endlich
- $\{1, 2, 8, -4, 3, 7, 12, 9, -1, 0, 42, 5\}$ ist abzählbar endlich
- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar und unendlich
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ist abzählbar unendlich
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich
- $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ ist überabzählbar und unendlich
- $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 6\}$ ist abzählbar endlich (denn $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$)

Eine abzählbare Menge wird als **endliche Menge** bezeichnet wenn sie endlich viele Elemente enthält. Enthält sie unendlich viele Elemente so bezeichnet man sie als **unendliche Menge**.

Eine überabzählbare Menge ist (per Definition) eine **unendliche Menge**, die leere Menge ist endlich.

Für endliche Mengen definiert man

▶ 2

Definition (Mächtigkeit einer endlichen Menge)

Ist M eine endliche Menge, dann bezeichnet die *Mächtigkeit* von M die Anzahl der Elemente von M.

Man symbolisiert die Mächtigkeit von M durch

$$|M| \quad \text{oder} \quad \#M \quad \text{oder} \quad \text{card}(M)$$

Beispiele:

i) $|\{\}| = 0$

ii) $|\{1, 2, 8, -4, 3, 7, 12, 9, -1, 0, 42, 5\}| = 12$

iii) $|\{2, 3, 4, 5, 6\}| = 5$

iv) $|\{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}, \text{gelb}\}| = 4$

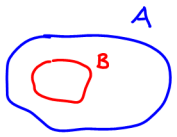
Dr. rer. nat. M. Striebel

Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Mengen und ihren Beziehungen:

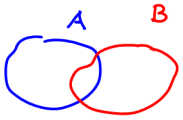
Venn-Diagramme

▶ 3

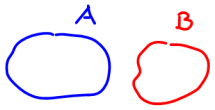
↳ Mengen dargestellt als grafische Objekte die unterschiedliche Beziehungen zueinander haben können

- 

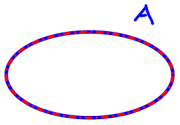
B liegt vollständig in A
A umfasst mehr als B

- 

A und B überschneiden sich haben aber „eigene" Bereiche

- 

A und B teilen keinen gemeinsamen Bereich

- 

A und B sind identisch

Beziehungen zwischen Mengen:

Seien im Folgenden A, B zwei Mengen

I) Gleichheit von Mengen

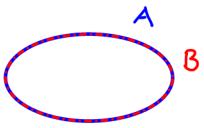
▶ 4

$$A = B \quad :\Leftrightarrow \quad (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

andernfalls $A \neq B$

(d.h. $(\exists\, x \in A : x \notin B)$
$\vee\ (\exists\, x \in B : x \notin A)$)

Venn-Diagramm:



Beispiele:

i) $\underbrace{\{1,2,4,3\}}_{=:A} = \underbrace{\{1,3,2,4\}}_{=:B}$

ii) $\underbrace{\{1,3,4,5\}}_{=:A} \neq \underbrace{\{1,4,5,7\}}_{=:B}$ $\quad 3 \notin B \wedge 7 \in A$

iii) $\{-1,0,3,4\} \neq \{-1,0,3,4,5\}$ $\quad$ da $5 \notin \{-1,0,3,4\}$

iv) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

II.) Begriff der Teilmenge und Obermenge

Man nennt A eine **Teilmenge von** B (Symbolisierung: $A \subseteq B$) wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Formalisiert: $A \subseteq B :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Dann nennt man B eine **Obermenge von** A (Symbolisierung: $B \supseteq A$)

Venn-Diagramme für Situation $A \subseteq B$ (bzw. $B \supseteq A$)

Bemerkungen:

i) wenn $A \subseteq B$ dann kann es (muss es aber nicht) Elemente von B geben die nicht Elemente von A sind.

D.h. $A = B \Rightarrow A \subseteq B$ aber $A \subseteq B \not\Rightarrow A = B$

ii) Ist $A \subseteq B$ und $\exists\, b \in B : b \notin A$ dann nennt man A eine **echte Teilmenge** von B (Symbolisierung: $A \subset B$) und B eine **echte Obermenge** von A (Symbolisierung: $B \supset A$)

iii) Es gilt: $\{\} \subseteq A$ (für jede beliebige Menge A)

insbesondere: $\{\} \subset A$ wenn $A \neq \{\}$

Beispiele:

i) $\{-1, 0, 3, 4\} \subset \{-1, 0, 3, 4, 5\}$

ii) $\{1, 3, 2\} \subseteq \{2, 1, 3\}$ hier sogar „$=$"

iii) $\{1, 4, 2\} \not\subseteq \{2, 1, 3\}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Potenzmenge (einer Menge) – Menge von Teilmengen

↑ eine Menge ist per Definition ein Objekt
Kann also Element einer Menge sein

Definition (Potenzmenge (einer Menge))

Es sei X eine beliebige Menge.

Unter der *Potenzmenge von* X versteht man die Menge aller Teilmengen von X. Man symbolisiert die Potenzmenge von X mit $\mathcal{P}(X)$.

Somit gilt:

$$\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$$

Bemerkung:

- Es gilt unabhängig von X: $\{\} \in \mathcal{P}(X)$, $X \in \mathcal{P}(X)$
- Die Elemente von Potenzmengen sind Mengen

Beispiele:

i) $X = \{1, 2, 3\}$

damit $\mathcal{P}(X) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 8 \quad (|X| = 3)$

ii) $X = \{2, a, b, -1\}$

damit $\mathcal{P}(X) = \{\{\}, \{2\}, \{a\}, \{b\}, \{-1\}, \{2,a\}, \{2,b\}, \{2,-1\},$
$\{a,b\}, \{a,-1\}, \{b,-1\}, \{2,a,b\}, \{2,a,-1\}, \{2,b,-1\},$
$\{a,b,-1\}, \{2,a,b,-1\}\}$

$\Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 16 \quad (|X| = 4)$

iii) $X = \emptyset$ (leere)

damit $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$

$\Rightarrow |\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 \quad (|\emptyset| = 0)$

iv) $X = \{a, b\}$

damit $\mathcal{P}(X) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

damit $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\},$
$\{\{\}, \{a\}\}, \{\{\}, \{b\}\}, \{\{\}, \{a,b\}\},$
$\{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\},$
$\{\{\}, \{a\}, \{b\}\}, \{\{\}, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\{\}, \{b\}, \{a,b\}\},$
$\{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

$\Rightarrow |\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))| = 16 \quad (|\mathcal{P}(X)| = 4, |X| = 2)$

Ist X eine beliebige endliche (abzählbare) Menge, dann gilt: $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

Dr. rer. nat. M. Striebel