Operationen mit Mengen

Voraussetzungen: Grundmenge Ω

Mengen $A, B, C, \ldots \subseteq \Omega$

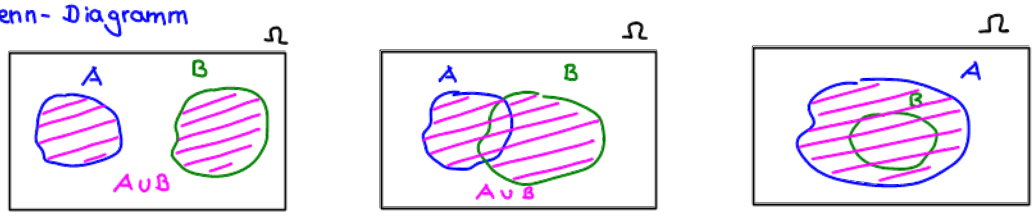
I.) Vereinigung von Mengen

▶ 1

Mit $A \cup B$ (sprich: „A vereinigt B") bezeichnet man die Vereinigung der Mengen A und B:

$$A \cup B := \{ x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

Venn-Diagramm



Beispiele:

i) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,7,0\} \Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,4,7,0\}$

ii) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,1,5\} \Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,5\}$

iii) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2\} \Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,4\}$

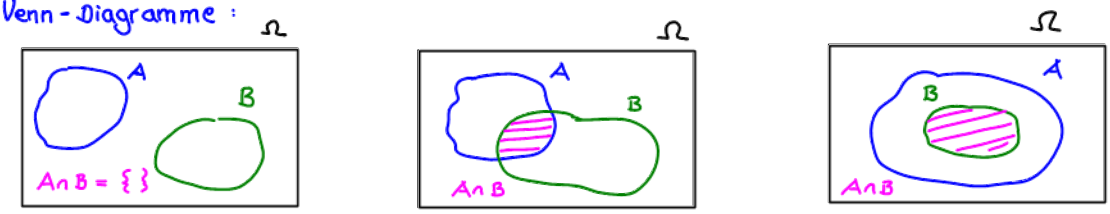
II.) Durchschnitt / Schnitt von Mengen

▶ 2

Mit $A \cap B$ (sprich: „A geschnitten B") bezeichnet man den Schnitt / Durchschnitt des Mengen A und B. Es ist

$$A \cap B := \{ x \in \Omega \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$

Venn-Diagramme:



Beispiele:

i) $\{1,2\} \cap \{3,4\} = \{\}$ $\Rightarrow$ $\{1,2\}$ und $\{3,4\}$ sind disjunkt

ii) $\{1,2,3\} \cap \{3,2,4\} = \{2,3\}$

iii) $\{1,4,5,8\} \cap \{4,5\} = \{4,5\}$

iv) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\} \cap \{y \in \mathbb{R} \mid |y| < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$

Bemerkung

Mengen A und B disjunkt (zueinander) wenn $A \cap B = \{\}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

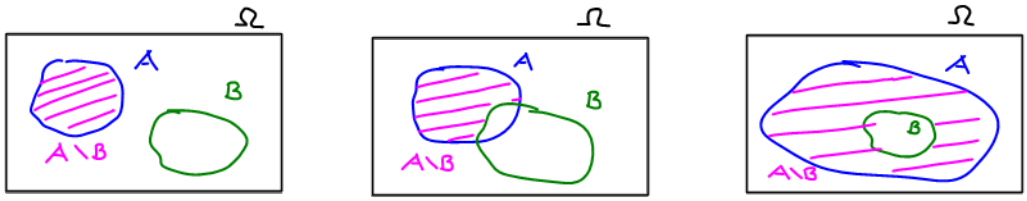
III.) Differenz von Mengen

▶ 3

Mit $A \setminus B$ (sprich: „A ohne B") bezeichnet man die Differenz von A zu B:

$$A \setminus B := \{ x \in \Omega \mid (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$$

Venn-Diagramme:



Beispiele:

i) $A = \{1, 2, 5, 3\}$, $B = \{4, 0, 7\}$

- $A \setminus B = \{1, 2, 5, 3\}$
- $B \setminus A = \{4, 0, 7\}$

ii) $A = \{1, -1, 0, 5, -8\}$, $B = \{5, 0, 1, 7\}$

- $A \setminus B = \{-1, -8\}$
- $B \setminus A = \{7\}$

iii) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d\}$

- $A \setminus B = \{a, c\}$
- $B \setminus A = \{\}$

IV.) Komplement einer Menge (bzgl. einer anderen Menge)

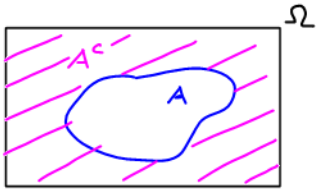
▶ 4

Für $A \subseteq \Omega$ nennt man

$$A^c_\Omega = A^c = \overline{A} = C_\Omega A := \Omega \setminus A$$

(sprich: A-Komplement (bzgl. Ω)) das Komplement von A bzgl. Ω.

Venn-Diagramm:



Bemerkung:

- $\{\}^c_\Omega = \Omega$
- $\Omega^c_\Omega = \{\}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Beispiele:

i) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\hat{\Omega} = \{-1, 2, 1, 7, 4\}$

$A = \{2, 4\}$

$\Rightarrow A^c_\Omega = \Omega \setminus A = \{1, 3, 5\}$

$A^c_{\hat{\Omega}} = \hat{\Omega} \setminus A = \{-1, 1, 7\}$

ii) $\Omega = \{a, b, c, d\}$

$A = \{b\}$

$\Rightarrow A^c_\Omega = \{a, c, d\}$

Gesetzmäßigkeiten:

- zur Teilmengen-Relation:

  es gilt: ▶ 5

  - $A \subseteq A$ (Reflexivität)
  - $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (Antisymmetrie)
  - $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (Transitivität)

- zu Durchschnitt & Vereinigung

  es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten: ▶ 6

  i) $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetze)

  ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativgesetze)

  und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

  iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetze)

  und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- zur Komplementbildung

  Es gelten die sog. De Morganschen Gesetze ▶ 7

  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- zur Differenzbildung: ▶ 8

  - $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ (Assoziativgesetze)

    und $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

  - $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ und $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (Distributivgesetze)
  - $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ und $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Dr. rer. nat. M. Strebel