Kartesisches Produkt

▶ 1

Definition (Kartesisches Produkt zweier Mengen)

Sind A, B zwei Mengen, so nennt man

$$A \times B := \{(a,b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

das *kartesische Produkt von A und B*.

Die Elemente (a,b) von $A \times B$ heißen *geordnete Paare* oder *Tupel* oder *2-Tupel*.

man spricht $A \times B$ aus als „A Kreuz B"

Beispiele:

▶ 2

i) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{-2,-3,0\}$ $\Rightarrow |A| = 3$, $|B| = 3$

$A \times B = \{(1,-2), (1,-3), (1,0), (2,-2), (2,-3), (2,0), (3,-2), (3,-3), (3,0)\}$ $\Rightarrow |A \times B| = 9$

$B \times A = \{(-2,1), (-2,2), (-2,3), (-3,1), (-3,2), (-3,3), (0,1), (0,2), (0,3)\}$ $\Rightarrow |B \times A| = 9$

ii) $A = \{x,y,z\}$, $B = \{1\}$ $\Rightarrow |A| = 3$, $|B| = 1$

$A \times B = \{(x,1), (y,1), (z,1)\}$ $\Rightarrow |A \times B| = 3$

$B \times A = \{(1,x), (1,y), (1,z)\}$ $\Rightarrow |B \times A| = 3$

iii) $A = \{1,3,5\}$ $A = \{1,3,5\}$ $\Rightarrow |A| = 3$

$A \times A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$ $\Rightarrow |A \times A| = 9$

man schreibt auch A^2 (spricht: „A zwei" oder „A hoch 2")

iv) $A = \{1,2,3\}$, $B = \mathbb{R}$ (B ist eine unendliche Menge)

$A \times B = A \times \mathbb{R} = \{(a,x) \mid a \in \{1,2,3\} \wedge x \in \mathbb{R}\}$ (A × B ist eine unendliche Menge)

$= \{(1,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(2,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(3,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

v) $A = \{2,7\}$, $B = \{\} = \emptyset$ ← B enthält keine Elemente

$A \times B = A \times \emptyset = \{\} = \emptyset$ (zu keinem Element aus A kann ein Element aus B hinzugewählt werden)

$|A| = 3$, $|B| = |\{\}| = 0$

$|A \times B| = 0$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Bemerkungen: ▶ 3

i.) Sind A und B endliche Mengen so sind $A \times B$ und $B \times A$ endliche Mengen mit

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|$$

ii) Jedes kartesische Produkt mit $\emptyset$ ist die leere Menge:

$$A \times \emptyset = \emptyset \quad \text{und} \quad \emptyset \times A = \emptyset \quad \forall A$$

iii) Ist A oder B eine unendliche Menge so sind $A \times B$ und $B \times A$ unendliche Mengen.

iv) Ist A oder B eine überabzählbare Menge so sind $A \times B$ und $B \times A$ überabzählbare Mengen.

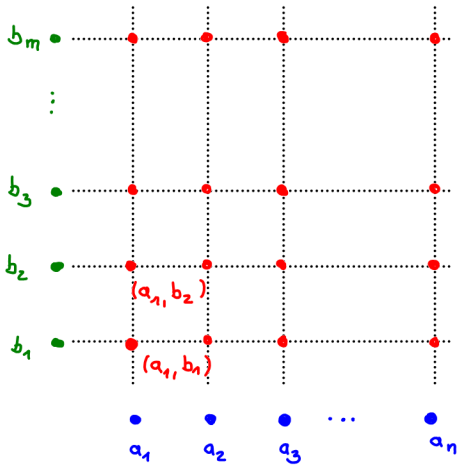
v) Im Allgemeinen gilt: $A \times B \neq B \times A$

Veranschaulichung ▶ 4

1. Fall: A, B abzählbar endlich ▶ 5

Sei $|A| = n$ und $|B| = m$ (mit $n, m \in \mathbb{N}_0$)

d.h. $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$



$A \times B$
dargestellt durch $n \cdot m$ Punkte
horizontale Lage beschreibt die A-Komponente
Vertikale Lage beschreibt die B-Komponente

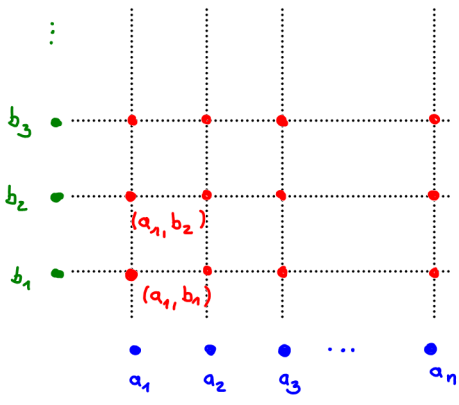
man sagt: „B wird über A aufgetragen"

2. Fall: A und B abzählbare Mengen, mindestens eine von beiden unendlich ▶ 6

nur Betrachtung des Sonderfalls: A endlich (mit $|A| = n$), B abzählbar unendlich

d.h. $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$



$A \times B$
dargestellt durch unendlich viele
unterscheidbare Punkte

Dr. rer. nat. M. Striebel

3. Fall : eine der Mengen ist abzählbar, die andere Menge ist überabzählbar

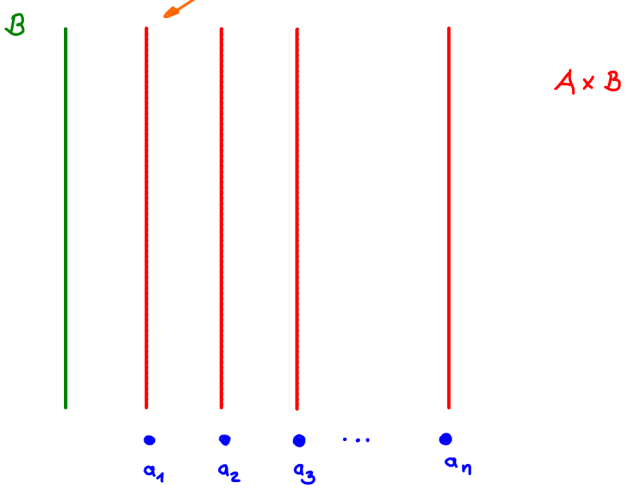
▶ 7

Annahme : A sei abzählbar endlich (mit $|A| = n$), B sei überabzählbar

dann ist $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

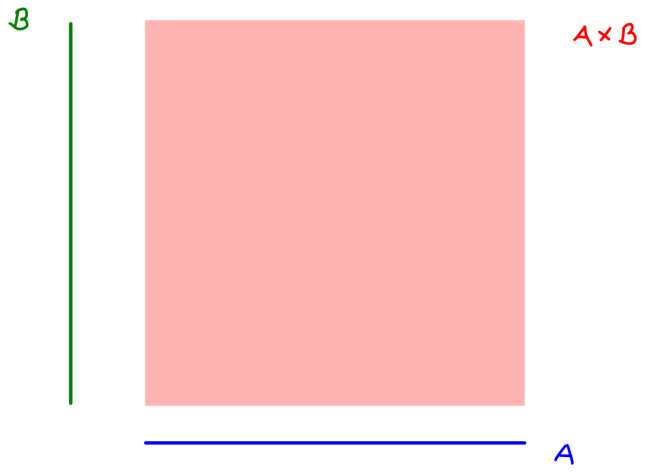
$$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

$$= \{(a_1, b) \mid b \in B\} \cup \{(a_2, b) \mid b \in B\} \cup \{(a_3, b) \mid b \in B\}$$
$$\dots \cup \{(a_n, b) \mid b \in B\}$$



4. Fall : A und B sind überabzählbare Mengen

▶ 8



▶ 9

Zusammenfassung :

Durch Abtragen von A in horizontaler und B in vertikaler Richtung, man sagt auch „B über A" lässt sich $A \times B$ darstellen als Punkte eines Gitters, horizontale bzw. vertikale Linien bzw. durchgängige Fläche, abhängig von den Eigenschaften von A und B.

Dr. rer. nat. M. Striebel

Verallgemeinerung

▶ 10

Definition (kartesisches Produkt von mehreren Mengen)

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n Mengen, so nennt man

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge \cdots \wedge (a_n \in A_n)\}$$

das *kartesische Produkt der Mengen* A_1 *bis* A_n.

Die Elemente $(a_1, \ldots, a_n)$ von $A_1 \times \cdots \times A_n$ heißen n-*Tupel*.

Bemerkungen:

i.) Für $n = 2$ nennt man die Elemente auch „Tupel",
für $n = 3$ „Tripel", für $n = 4$ „Quadrupel", für $n = 5$ „Quintupel".

ii) Ist eine der Mengen die leere Menge so ist $A_1 \times \ldots \times A_n = \emptyset$

iii) Sind alle beteiligten Mengen endlich, dann ist

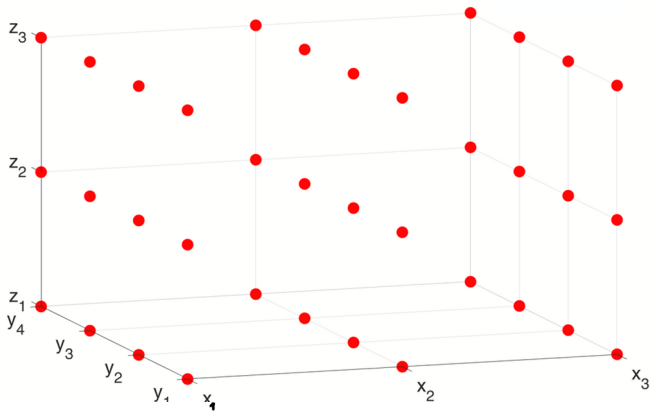
$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

iv) Ist mindestens eine der Mengen unendlich / überabzählbar dann ist das kartesische Produkt unendlich / überabzählbar.

v) Manchmal schreibt man die n-Tupel statt in horizontaler Richtung $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ auch in vertikaler Orientierung als $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Veranschaulichung

Neben dem Fall $n = 2$ ist eine Darstellung nur für $n = 3$ sinnvoll umsetzbar:

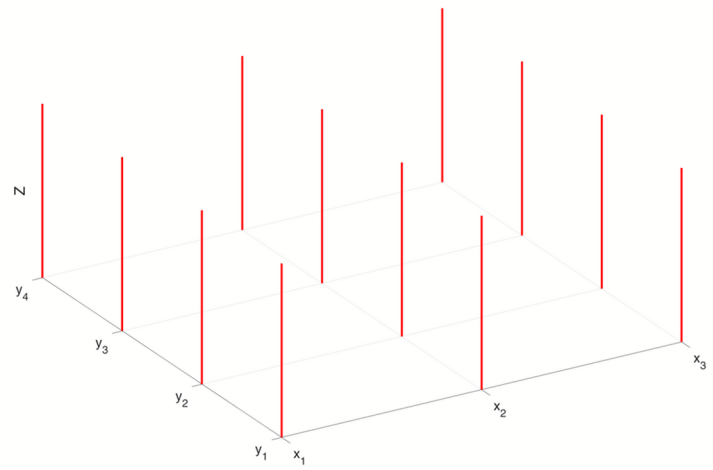


$X \times Y \times Z$ für $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

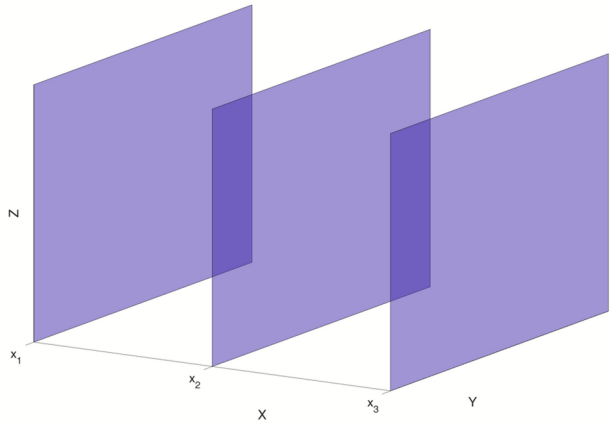


$X \times Y \times Z$

mit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

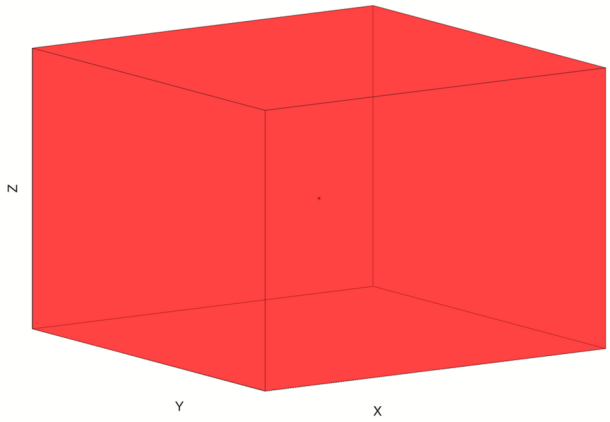
Z : überabzählbare Menge



$X \times Y \times Z$

mit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

Y, Z überabzählbare Mengen



$X \times Y \times Z$

mit X, Y, Z : überabzählbare Mengen

Beispiele:

i) $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, -1, -2\}$, $C = \{a, b\}$

$$A \times B \times C = \{(1,0,a), (1,0,b), (1,-1,a), (1,-1,b), (1,-2,a), (1,-2,b),$$
$$(2,0,a), (2,0,b), (2,-1,a), (2,-1,b), (2,-2,a), (2,-2,b)\}$$

$$|A| = 2, \quad |B| = 3, \quad |C| = 2, \quad |A \times B \times C| = 12 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = |A| \cdot |B| \cdot |C|$$

Elemente von $A \times B \times C$ sind 3-Tupel / Tripel

Dr. rer. nat. M. Striebel

ii) $A = \{1,2\}$, $B = \{0,-1,-2\}$, $C = \{a,b\}$

$$(A \times B) \times C = \{(1,0),(1,-1),(1,-2),(2,0),(2,-1),(2,-2)\} \times \{a,b\}$$

↑ Kartesisches Produkt von $A \times B$ mit C

$$= \{((1,0),a),((1,0),b),((1,-1),a),((1,-1),b),$$
$$((1,-2),a),((1,-2),b),((2,0),a),((2,0),b),$$
$$((2,-1),a),((2,-1),b),((2,-2),a),((2,-2),b)\}$$

Elemente von $(A \times B) \times C$ sind 2-Tupel / Tupel

d.h. $A \times B \times C \neq (A \times B) \times C$ ⚠

Dr. rer. nat. M. Striebel