Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

im Weiteren vorausgesetzt:
Nutzung des Dezimalsystems

Definition / Beschreibung von $\mathbb{R}$

▶ 1

$\mathbb{R}$ = Menge der rationalen Zahlen ∪ Menge der irrationalen Zahlen

$\mathbb{Q}$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$= \{ \pm 0, d_1 d_2 d_3 \ldots \cdot 10^E \mid d_k \in \{0,1,2,\ldots,9\} \; \forall k \in \mathbb{N} \wedge E \in \mathbb{Z} \}$$

man nennt d_k die k-te Nachkommastelle
E den Exponenten

Menge aller Zahlen mit endlicher oder unendlicher Dezimaldarstellung

↳ $\exists n \in \mathbb{N}: d_\ell = 0 \; \forall \ell \geq n$

Beispiele:

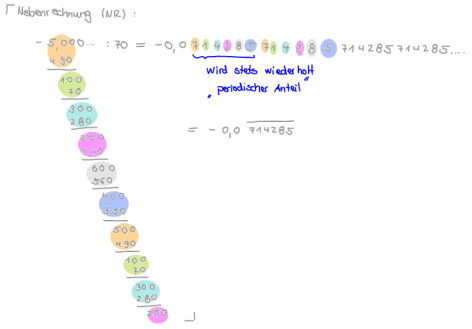
▶ 2

i) $\frac{1}{2} = 0,5 = +0,5 \cdot 10^0$ Vorzeichen: +, endliche Dezimaldarstellung: $d_1 = 5$, $d_2 = d_3 = \ldots = 0$
Exponent: $E = 0$

ii) $20,75 = +0,2075 \cdot 10^2$: Vorzeichen +
endliche Dezimaldarstellung: $d_1 = 2$, $d_2 = 0$, $d_3 = 7$, $d_4 = 5$
$d_\ell = 0 \; \forall \ell \geq 5$
Exponent: $E = 2$

iii) $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,\overline{3} = +0,\overline{3} \cdot 10^0$: Vorzeichen: +
unendliche periodische Dezimaldarstellung: $d_k = 3 \; \forall k \in \mathbb{N}$
Exponent: 0

iv) $-\frac{5}{70} = -0,0\overline{714285}$: Vorzeichen: −
unendliche periodische Dezimaldarstellung:



$d_1 = 0$
$d_2 = d_8 = d_{14} = \ldots = 7$
$d_3 = d_9 = d_{15} = \ldots = 1$
$d_4 = d_{10} = d_{16} = \ldots = 4$
$d_5 = d_{11} = d_{17} = \ldots = 2$
$d_6 = d_{12} = d_{18} = \ldots = 8$
$d_7 = d_{13} = d_{19} = \ldots = 5$

Exponent: $E = 0$

Bemerkung: $-\frac{5}{70} = -0,\overline{714285} \cdot 10^{-1}$

v) $\sqrt{2} = 1,414213562373095\ldots$
↳ keine periodische Wiederholung

$= 0,1414213562373095\ldots \cdot 10^1$

Vorzeichen: +
unendliche nicht periodische Dezimaldarstellung
Exponent: $E = 1$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Bemerkung: ▶ 3

Die Menge der rationalen Zahlen ist die Menge aller reellen Zahlen mit endlichen oder periodischen unendlichen Dezimaldarstellung. Die Menge der irrationalen Zahlen ist die Menge aller reellen Zahlen, die eine unendliche nicht-periodische Dezimaldarstellung besitzen.

Beispiele:

für rationale Zahlen:

$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{7}$; $-\frac{4}{178}$; $0{,}213578$; $12{,}\overline{37185}$

(endliche Dezimaldarstellung; unendliche periodische Dezimaldarstellung)

für irrationale Zahlen:

$\sqrt{2}$; e (Eulersche Zahl); π (Kreiszahl); $\sqrt[3]{13}$

Grundrechenarten in $\mathbb{R}$ ▶ 4

„Strich-Rechnungen": + (Addition), − (Subtraktion)

„Punkt-Rechnungen": · (Multiplikation), : (auch / oder ÷) (Division)

„Hauptgrundrechenarten"

Satz (Rechenregeln der Addition und Multiplikation) ▶ 5

In der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gelten folgende Rechenregeln für die Addition $(+)$ und die Multiplikation $(\cdot)$

i.) $a+b=b+a$ bzw. $a\cdot b=b\cdot a$ (*Kommutativgesetze*)

ii.) $(a+b)+c=a+(b+c)$ bzw. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (*Assoziativgesetze*)

iii.) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (*Distributivgesetz*)
aber: $a+(b\cdot c)=a+b\cdot c$ („Punkt vor Strich")

iv.) $0+a=a$ (*neutrales Element der Addition*)

v.) $1\cdot a=a$ (*neutrales Element der Multiplikation*)

vi.) zu jedem a gibt es ein $-a\in\mathbb{R}$ so, dass $a+(-a)=0$ (*inverses Element der Addition*)

vii.) zu jedem $a\neq 0$ gibt es ein $a^{-1}\in\mathbb{R}$ so, dass $a\cdot a^{-1}=1$ (*inverses Element der Multiplikation*)

jeweils $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen sind.

es gilt nicht: $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$

▶ 9 begründen die Subtraktion und Division

Bemerkungen:

- Zum Distributivgesetz: ▶ 6

  von links nach rechts ausgeführt: „ausmultiplizieren"

  $x\cdot(3+7x)=3\cdot x+7x^2$

  von rechts nach links ausgeführt: „ausklammern"

  $3\cdot x+7x^2=x\,(3+7x)$

Dr. rer. nat. M. Striebel

- „Punkt-vor-Strich": Multiplikation hat höhere Priorität als die Addition

▶ 7

d.h. $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$

Aufgrund • kann man die Klammern weglassen

- Klammern legen (im Zweifelsfall) Prioritäten fest und beseitigen Unklarheiten

▶ 8

- zum inversen Element der Addition (das additiv Inverse):

Subtraktion:

für $a, b \in \mathbb{R}$ ist: $a - b := a + (-b)$

▶ 9

d.h. a minus b = Addition des additiv Inversen von b zu a

zu $b \in \mathbb{R}$ ist $-b = -1 \cdot b$

- Zum inversen Element der Multiplikation (das multiplikativ Inverse):

Division:

für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$

▶ 10

d.h. a geteilt durch b = Multiplikation des multiplikativ Inversen von b mit a

zu $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $b^{-1} = \frac{1}{b}$

zu den Grundrechenarten in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$

▶ 11

- alle o.g. Rechenregeln (i.) – vii.)) gelten auch in $\mathbb{Q}$

  wegen Gültigkeit von vi) gibt es in $\mathbb{Q}$ die Subtraktion

  wegen Gültigkeit von vii) gibt es in $\mathbb{Q}$ die Division

„Division durch Multiplikation mit dem Kehrwert"

$w = \frac{p}{q}$, $z = \frac{r}{s}$

$\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}$

- in $\mathbb{Z}$ gelten die Rechenregeln i.) – vi.) aber vii.) gilt i.A. nicht

  wegen Gültigkeit von vi.) gibt es in $\mathbb{Z}$ die Subtraktion

  weil i.A. zu $a \in \mathbb{Z}$ kein $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ existiert, gibt es in $\mathbb{Z}$ keine Division

- in $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ gelten die Regeln i.), ii.), iii.), da $0 \notin \mathbb{N}$ gilt iv.) nicht (in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ gilt auch iv.)), die Regel v.) gilt (d.h. $1 \cdot a = a \ \forall a \in \mathbb{N}$), die Regeln vi.) und vii.) gelten i.A. nicht

  d.h. in $\mathbb{N}$ gibt es keine Subtraktion und keine Division

Dr. rer. nat. M. Striebel

Warum muss man Zahlenmengen erweitern?

▶ 12

Motiviert durch Lösbarkeit von Gleichungen

1.) Für beliebige Werte $a,b \in \mathbb{N}$ ist i.A. die Gleichung $\boxed{x+a=b}$ nicht in $\mathbb{N}$ lösbar (d.h. es gibt i.A. kein $x \in \mathbb{N}$, so dass $x+a=b$)

▶ 13

z.B. • $x+\underbrace{7}_{=a}=\underbrace{3}_{=b} \Leftrightarrow x=-4 \notin \mathbb{N}$

↳ nicht in $\mathbb{N}$ lösbar

• $x+\underbrace{2}_{=a}=\underbrace{5}_{=b} \Leftrightarrow x=3 \in \mathbb{N}$

↳ in $\mathbb{N}$ lösbar

$\mathbb{N}$ reicht nicht aus, um die Gleichung $x+a=b$ allgemein zu untersuchen / lösen

Problem: Nicht-Existenz eines additiv Inversen zu $a \in \mathbb{N}$

Ausweg: Erweiterung um additiv Inverse $\Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

in $\mathbb{Z}$ ist die Gleichung $x+a=b$ für beliebige Werte $a,b \in \mathbb{Z}$ lösbar

mit $x=b-a=b+(-a)$

z.B. • $x+\underbrace{7}_{=a}=\underbrace{3}_{=b} \Leftrightarrow x=\underbrace{3}_{b}+\underbrace{(-7)}_{=-a \in \mathbb{Z}}=-4 \in \mathbb{Z}$

• $x-5=3 \Leftrightarrow x+\underbrace{(-5)}_{=a}=\underbrace{3}_{=b}$

$\Leftrightarrow x=3-(-5) \Leftrightarrow x=\underbrace{3}_{=b}+\underbrace{(-(-5))}_{=-a}=3+5=8 \in \mathbb{Z}$

2) Für beliebige $a,b \in \mathbb{Z}$ ist die Gleichung $\boxed{x \cdot a=b}$ i.A. nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar (d.h. i.A. gibt es kein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $x \cdot a=b$)

▶ 14

z.B. • $x \cdot \underbrace{3}_{=a}=\underbrace{7}_{=b} \Leftrightarrow x=\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$

↳ nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar

• $x \cdot \underbrace{2}_{=a}=\underbrace{-4}_{=b} \Leftrightarrow x=-2 \in \mathbb{Z}$

↳ in $\mathbb{Z}$ lösbar

$\mathbb{Z}$ reicht nicht aus, um die Gleichung $x \cdot a=b$ allgemein zu untersuchen / lösen

Problem: Nicht-Existenz eines multiplikativ Inversen zu $a \in \mathbb{Z}$

Ausweg: „Erweiterung um multiplikativ Inverse" $\Rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

in $\mathbb{Q}$ ist die Gleichung $x \cdot a = b$ für (fast) beliebige Werte von $a, b \in \mathbb{Q}$ lösbar

($a \neq 0$)

z.B.:
- $x \cdot 3 = 7 \Leftrightarrow x = 7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$
- $x \cdot (-2) = 4 \Leftrightarrow x = 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = -2 \in \mathbb{Q}$
- $x \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{a} = \underbrace{5}_{b} \Leftrightarrow x = \underbrace{5}_{=b} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}_{=a^{-1}} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \in \mathbb{Q}$

3.) Für beliebige $q \in \mathbb{Q}$ ist i.A. die Gleichung $\boxed{x^2 = q}$ nicht in $\mathbb{Q}$ lösbar

▶ 15

(nicht für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gibt es eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ so dass $x \cdot x = q$)

z.B. $x^2 = \underbrace{2}_{=q} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (d.h. $\nexists\, r, s \in \mathbb{Z} : \frac{r}{s} = \sqrt{2}$)

Lösungen sind nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten

aber $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind irrationale Zahlen

- $x^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ oder $x = -\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$
- $x^2 = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \cdot j$ oder $x = -\frac{2}{3} j$

Lösungen sind nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten

j (oder i) : imaginäre Einheit
↯ weder rational noch irrational
d.h. $\notin \mathbb{R}$

(Teil-) Ausweg: Für positive $q \in \mathbb{Q}$ (d.h. $\exists\, r, s \in \mathbb{N} : q = \frac{r}{s}$) hat die Gleichung $x^2 = q$ immer zwei Lösungen in $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationale Zahlen}\}$

☺ Für negative $q \in \mathbb{Q}$ (d.h. $\exists\, r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N} : q = \frac{r}{s}$) genügt $\mathbb{R}$ nicht um Lösungen von $x^2 = q$ zu finden (⇝ Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$)

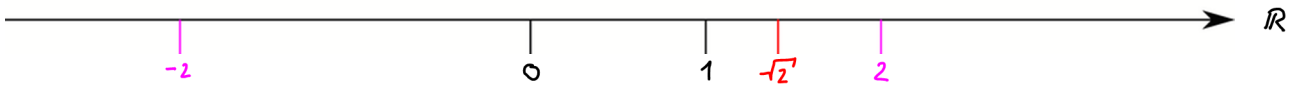
Dr. rer. nat. M. Striebel

Grafische Darstellung der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

▶ 16

Zahlenstrahl:
- jede reelle Zahl wird repräsentiert durch genau einen Punkt auf dem Zahlenstrahl
- jede Stelle auf dem Zahlenstrahl repräsentiert genau eine reelle Zahl

(„mathematisch": „$\mathbb{R}$ ist stetig")



Ordnungsrelation – Größenvergleich (reeller Zahlen)

▶ 17

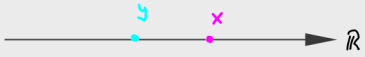
Größenvergleich:

Für je zwei beliebige reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen

I. $x = y$: x ist gleich y

II. $x < y$: x ist kleiner als y

III. $x > y$: x ist größer als y



Äquivalenzen:

I.: $x = y \Leftrightarrow y = x$

II.: $x < y \Leftrightarrow y > x$ „x ist kleiner als y" gleichbedeutend zu „y ist größer als x"

III.: $x > y \Leftrightarrow y < x$

Negationen:
- Nicht-Gültigkeit von I.: $x \neq y$ „x ist ungleich / nicht gleich y"
- Nicht-Gültigkeit von II.: $x \geq y$ „x ist größer gleich y"
- Nicht-Gültigkeit von III.: $x \leq y$ „x ist kleiner gleich y"

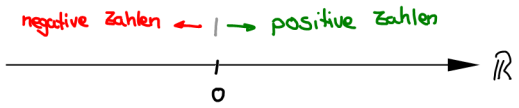
Dr. rer. nat. M. Striebel

Einteilung der reellen Zahlen : positive, negative Zahlen und die Zahl 0

Definition (positive & negative Zahlen)

Man nennt eine Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- eine *positive Zahl*, wenn $x > 0$ ist,
- eine *negative Zahl*, wenn $x < 0$ ist.



Bemerkungen:

- Die Zahl 0 ist weder positiv noch negativ
- Menge der positiven Zahlen : $\mathbb{R}^+ := \{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x > 0 \}$
- Menge der negativen Zahlen : $\mathbb{R}^- := \{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x < 0 \}$
- Menge der nicht negativen Zahlen ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$)

  $$\mathbb{R}_0^+ := \{ x \in \mathbb{R} \mid (x > 0) \vee (x = 0) \}$$

- Menge der nicht positiven Zahlen ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$)

  $$\mathbb{R}_0^- := \{ x \in \mathbb{R} \mid (x < 0) \vee (x = 0) \}$$

- Vorzeichen: (Signum)
  - positiven Zahlen wird das Vorzeichen + zugeordnet (zumeist weggelassen, d.h. $+7 = 7$)
  - negativen Zahlen wird das Vorzeichen − zugeordnet
  - 0 hat kein (eindeutiges) Vorzeichen
    ↳ $-0 = +0 = 0$

    Vorzeichenfunktion:

    $$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$ ⊥

Dr. rer. nat. M. Striebel

Betrag einer Zahl

▶ 19

Definition (Betrag einer reellen Zahl)

Der *Betrag einer reellen Zahl* x ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -1 \cdot x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Beispiele:

i) $|3| = 3$

ii) $|-7| = -1 \cdot (-7) = 7$

iii) $\left|\frac{-2}{3}\right| = (-1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

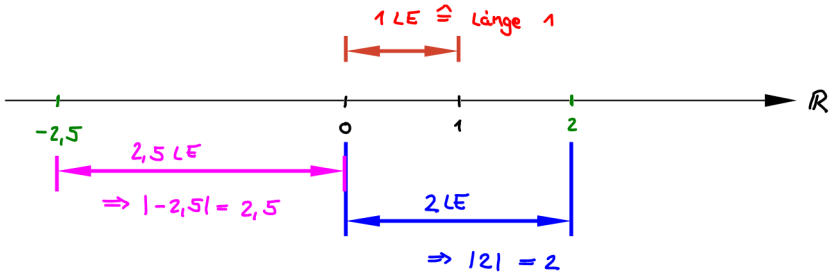
iv) $|0| = 0$

Bemerkungen

i) $|x| \in \mathbb{R}_0^+$ für alle $x \in \mathbb{R}$ insbesondere: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (d.h. $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$)

ii) Interpretation:

$|x| \mathrel{\hat{=}}$ Abstand des Repräsentanten von x auf dem Zahlenstrahl von der 0



Intervalle – spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$

▶ 20

Definition (Intervalle in $\mathbb{R}$)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ nennt man

i.) $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *offenes Intervall von a bis b,*

ii.) $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall von a bis b,*

iii.) $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *links offenes Intervall von a bis b,*

iv.) $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *rechts offenes Intervall von a bis b.*

$a < x < b \Leftrightarrow (a < x) \wedge (x < b)$

Bemerkungen:

- Nur für $a < b$ ergeben sich sinnvolle Intervalle
  man nennt dann a die linke und b die rechte Intervallgrenze
- alternative Symbolik: Verwendung von] statt (bzw. [statt) :

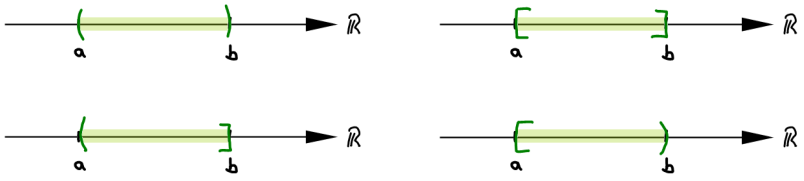
$(a,b) =]a,b[$ bzw. $(a,b] =]a,b]$ bzw. $[a,b) = [a,b[$

Dr. rer. nat. M. Striebel

- unter der Annahme $a < b$ gilt:
  - beim offenen Intervall:
    - $a \notin (a,b)$ aber $a+\varepsilon \in (a,b)$ $\forall\, \varepsilon << 1$ (auch: $\forall\, \varepsilon > 0$)
    - $b \notin (a,b)$ aber $b-\varepsilon \in (a,b)$ $\forall\, \varepsilon > 0$

    d.h. für jeden sehr kleinen positiven Wert ε
  - beim abgeschlossenen Intervall:
    - $a \in [a,b]$
    - $b \in [a,b]$
  - beim links offenen Intervall:
    - $a \notin (a,b]$ aber $a+\varepsilon \in (a,b]$ $\forall\, \varepsilon > 0$
    - $b \in (a,b]$
  - beim rechts offenen Intervall:
    - $a \in [a,b)$
    - $b \notin [a,b)$ aber $b-\varepsilon \in [a,b)$

- Darstellung auf dem Zahlenstrahl (Voraussetzung: $a < b$)



- Für $a < b$ $(a,b \in \mathbb{R})$ nennt man $b-a$ die Länge des Intervalls:

▶ 21

mit $I = (a,b)$ oder $I = [a,b]$ oder $I = (a,b]$ oder $I = [a,b)$

ist $|I| := b-a$ die Länge des Intervalls I.

Beispiele:

i) $I = (-3, 4)$: $-3 \notin I$, $4 \notin I$

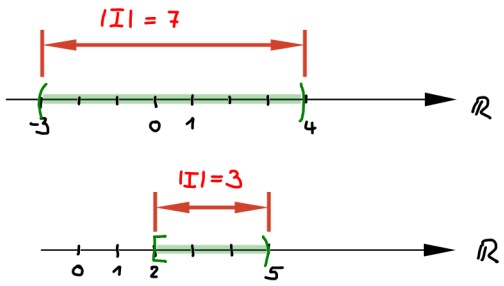
$|I| = 4 - (-3) = 7$

$-3 + 10^{-10000} \in I$

ii) $I = [2, 5)$: $2 \in I$, $5 \notin I$

$|I| = 5 - 2 = 3$

$5 - 10^{-2000000} \in I$



Dr. rer. nat. M. Striebel

Neben den sog. beschränkten / endlichen Intervallen definiert man auch die sog. unbeschränkten / unendliche Intervalle:

▶ 22

Definition (unbeschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$)

Für $a \in \mathbb{R}$ nennt man

i.) $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ *rechtsseitig unbeschränktes offenes Intervall,*

ii.) $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ *rechtsseitig unbeschränktes abgeschlossenes Intervall,*

iii.) $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ *linksseitig unbeschränktes offenes Intervall,*

iv.) $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ *linksseitig unbeschränktes abgeschlossenes Intervall.*

$-\infty$, ∞ (minus unendlich, unendlich)
sind keine Zahlen, d.h. stellen keine Werte : $-\infty \notin \mathbb{R}$, $+\infty \notin \mathbb{R}$

Bemerkungen

- links- & rechtsseitig unbeschränktes Intervall: $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$
- $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$

Dr. rer. nat. M. Striebel