Funktionen im Mehrdimensionalen

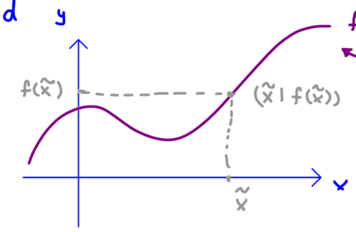
besser: skalaren / vektorwertigen Funktionen einer / mehrerer Veränderlicher

Muster: $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $n, m \geq 1$

Themengebiete:
- Funktionenklassen
- Differentiation
- Integration $\rightsquigarrow$ Vektoranalysis: $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Erinnerung: reelle Funktion, d.h. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y := f(x)$

- Graph / Funktionsschaubild



$\text{Graph}(f) = \{ (x \mid f(x)) \mid x \in I \}$

- Stetigkeit
  - Stetigkeit an einer Stelle $x_0 \in I$:

    $$f \text{ stetig an } x_0 \;:\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

    „f stetig an einer Stelle x_0 wenn der Graph(f) an der Stelle x_0 keine Sprungstelle hat"

  - Stetigkeit auf einem Intervall $[a,b]$:

    $$\underbrace{f \text{ stetig auf } [a,b]}_{} \;:\Leftrightarrow\; f \text{ stetig an allen Stellen } x_0 \in [a,b]$$

    Symbolik: $f \in C^0([a,b])$

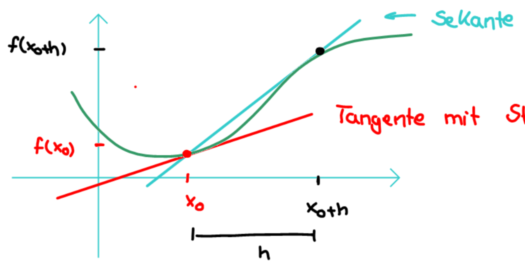
- Differenzierbarkeit:
  - Differenzierbarkeit an einer Stelle $x_0 \in I$:

    f ist an der Stelle x_0 differenzierbar und besitzt dort den Ableitungswert $f'(x_0) \in \mathbb{R}$

    $$:\Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

    Differenzenquotient $\hat{=}$ Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0 \mid f(x_0))$, $(x_0+h \mid f(x_0+h)) \in \text{Graph}(f)$

„f differenzierbar an x_0 wenn der Graph(f) dort keinen Knick hat"



  - Differenzierbarkeit auf einem Intervall $[a,b]$

    f differenzierbar auf $[a,b]$ und besitzt dort die Ableitungsfunktion $f': [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$

    $:\Leftrightarrow$ f differenzierbar $\forall x_0 \in [a,b]$ mit Ableitung $f'(x_0)$

    ist f' stetig auf $[a,b]$ dann heißt f auf $[a,b]$ stetig differenzierbar (Symbol: $f \in C^1([a,b])$)

Differenzialoperator: $\frac{d}{dx}$ (sprich „d nach dx") ▶ 5

Einsatz/Bedeutung: $\frac{d}{dx} f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \;\hat{=}\;$ differenziere f (nach x) an der Stelle x_0

„df nach dx"

es gilt dann $\boxed{\frac{d}{dx} f(x_0) = f'(x_0)}$

praktische Differentiation:

via Differentiationsregeln & bekannte Ableitungsfunktionen

- Integration: ▶ 6
  - unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

wobei F Stammfunktion von f, d.h. $F'(x) = f(x)$

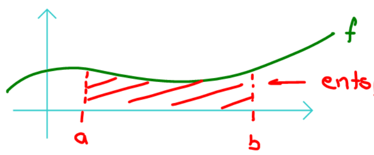
$C \in \mathbb{R}$ Integrationskonstante

Bestimmung von F: Integrationsregeln & bekannte Stammfunktionen

  - bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Interpretation:
Flächeninhalt zwischen Graph(f) & horizontale Achse
in den Grenzen a, b



I.) vektorwertige Funktionen einer Veränderlichen ▶ 7

Untersuchungsobjekt: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$

Beispiele:

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\; t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \ln(t) \end{pmatrix}$

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\; t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\; t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$

iv) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\; t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

v.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4,\; t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

vi) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\; t \to f(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z(t)) \\ \mathrm{Im}(z(t)) \end{pmatrix}$ mit $z(t) = (1+2j) + 3e^{j \cdot t}$

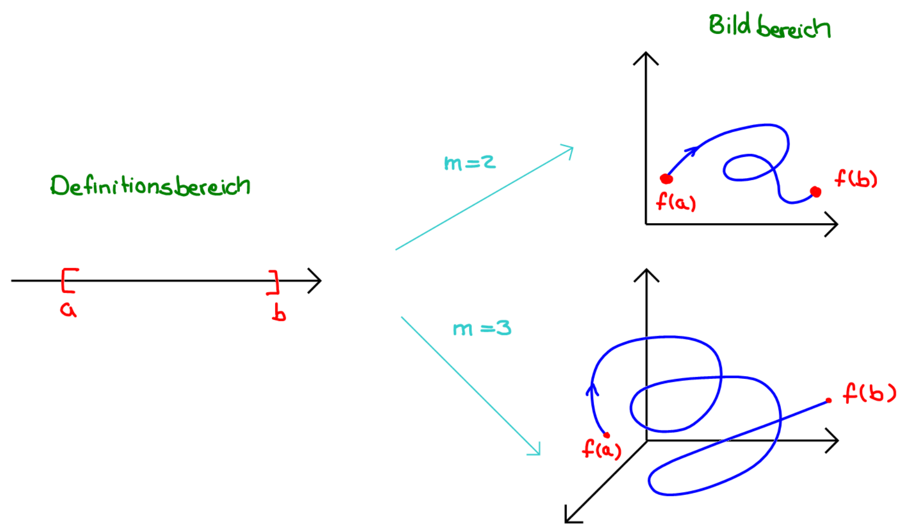
Definition (parametrisierte Kurve / Weg)

Man bezeichnet die Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ als *(parametrisierte) Kurve/Weg* in $\mathbb{R}^m$.

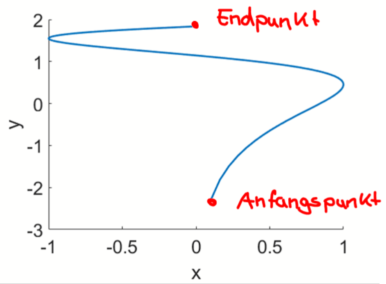
Man nennt:

- $f(a)$ den *Anfangspunkt* der Kurve,
- $f(b)$ den *Endpunkt* der Kurve,
- die Kurve *geschlossen*, falls $f(a) = f(b)$

Kurven grafisch darstellbar für $m = 2$ & $m = 3$ $(\neq \text{Graph}(f))$



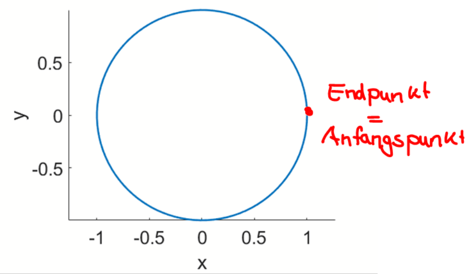
Beispiele:



$f : [0.1, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \ln(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

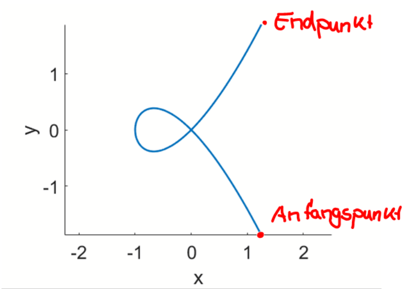
nicht geschlossene Kurve



$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

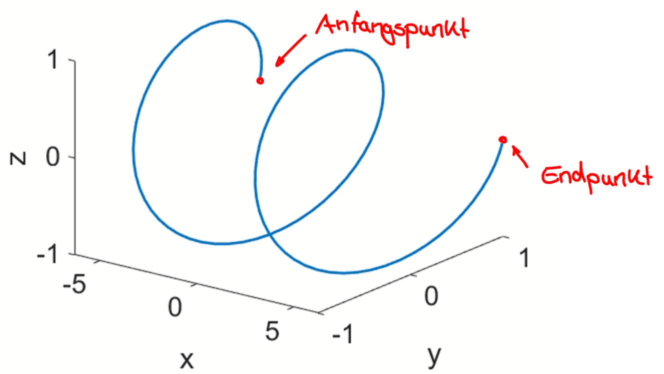
geschlossene Kurve



$f: [-1.5, 1.5] \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

nicht geschlossene Kurve



$f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

nicht geschlossene Kurve

Definition (Ableitung einer vektorwertigen Funktion einer Veränderlichen)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}^m$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ (Intervall).

Für einen Wert $t_0 \in I$ ist die Ableitung von f an der Stelle t_0 „komponentenweise“ definiert.

Ist für $k = 1, \dots, m$ die skalare Funktion $f_k : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f_k(t)$ die k-te Komponente von f, d. h.

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix},$$

dann ist

$$f'(t_0) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0) := \begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_m'(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

die *Ableitung von f an der Stelle t_0*, falls die Komponentenfunktionen f_k an der Stelle t_0 differenzierbar sind, d. h. falls $f_k'(t_0)$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ existiert.

▶ 10

Beispiele:

▶ 11

i) $f(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \ln(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1/t \end{pmatrix}$

ii) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t^3-t \end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-1 \end{pmatrix}$

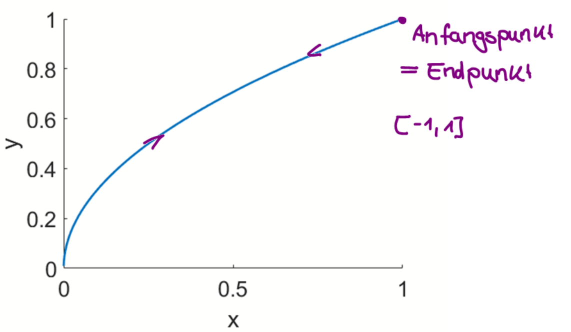
iii) $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

iv) $f(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 7 \cdot t \\ 3 + t \\ 1 - t \\ 2t \end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

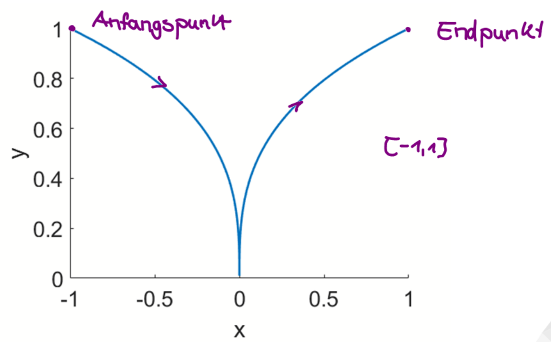
v) $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ |t| \end{pmatrix}$: $f'(0)$ nicht definiert, denn $|t|$ ist in 0 nicht differenzierbar ▶ 12

- Fall 1: $t < 0$: $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$
- Fall 2: $t > 0$: $f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \rightsquigarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

vi) $f(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ |t| \end{pmatrix}$ nicht in 0 differenzierbar, denn $|t|$ ist in 0 nicht differenzierbar



$f : [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ |t| \end{pmatrix}$



$f : [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ |t| \end{pmatrix}$

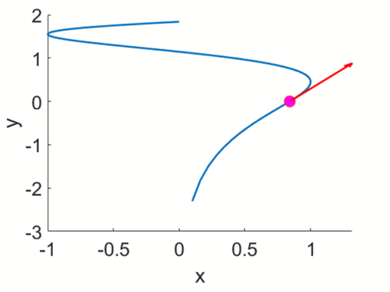
⚠ dargestellt sind nicht die Graphen

Bedeutung der Ableitung

▶ 13

$f'(t_0) \in \mathbb{R}^m \;\hat{=}\;$ Tangentialvektor an die Kurve f im Punkt $f(t_0)$

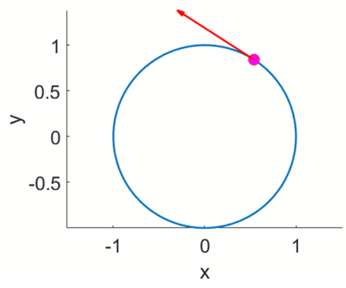
Beispiele



$f: [0.1, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \ln(t) \end{pmatrix}$

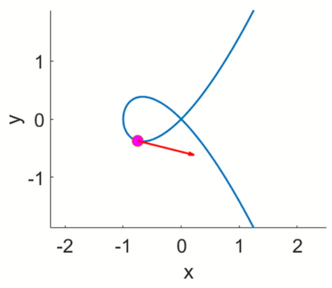
$t_0 = 1$



$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

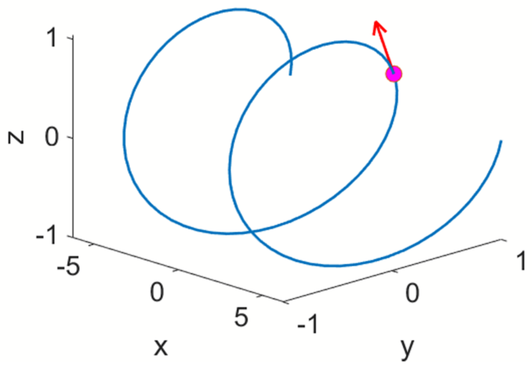
$t_0 = 1$



$f: [-1.5, 1.5] \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$

$t_0 = 0.5$



$f: [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$t_0 = 0{,}4$