II.) reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher

▶ 1

Untersuchungsobjekt:

- $f: D \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$
- $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$

$\ulcorner \; \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, .., x_n \in \mathbb{R} \right\}$
$\quad \parallel$
$\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, .., x_n \in \mathbb{R} \}$

Beispiele

▶ 2

i) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto f(x,y) = \sin(x) \cdot y \quad : f(\frac{\pi}{2}, 4) = \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(4, \frac{\pi}{2}) = \sin(4) \cdot \frac{\pi}{2}$

ii) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (x, y, z) \mapsto f(x,y,z) = x + y \cdot z \quad : f(1,2,3) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(-2,3,8) = -2 + 3 \cdot 8 = 22$

iii) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \; \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_2$

Funktionsgraph & Höhenlinie

▶ 3

Definition (Funktionsgraph)

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsmenge $D \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}$

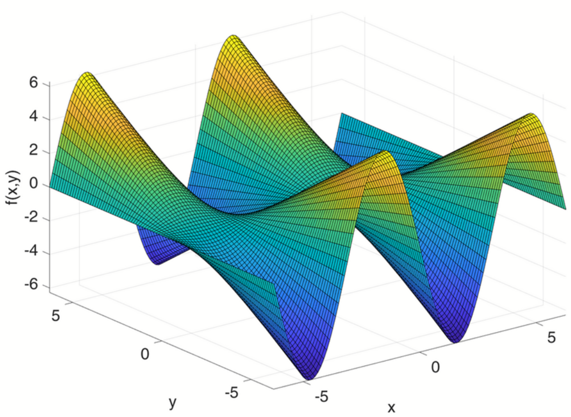
Als *Funktionsgraph* (oder *Graph*) der Funktion f bezeichnet man die Menge

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}. \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

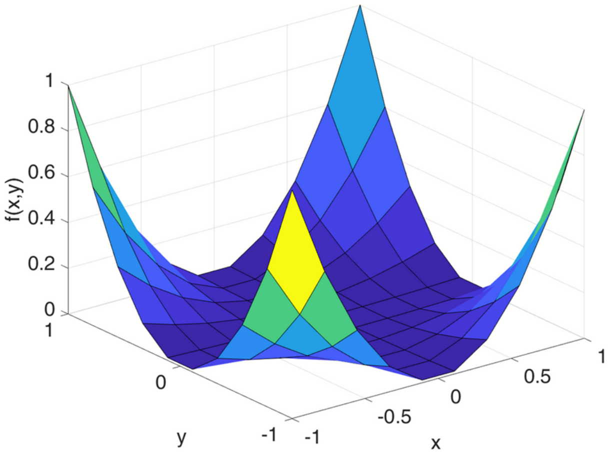
Bemerkung: für $n = 2$, d.h. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist $\text{Graph}(f) \subset \mathbb{R}^3$ und lässt sich in einer sog. Oberflächendarstellung veranschaulichen

Beispiele

▶ 4

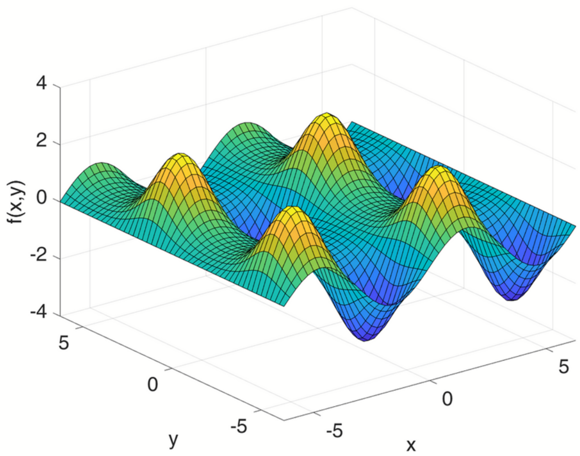


$f(x,y) = \sin(x) \cdot y$



$f(x,y) = x^2 \cdot y^2$

5



$f(x,y) = \sin(x) \cdot e^{\sin(y)}$

6

Definition (Höhenlinie, Niveaulinie)

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsmenge $D \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}$

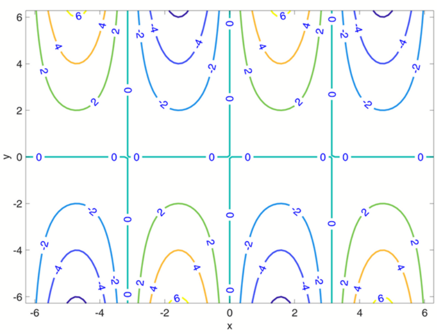
Als *Höhenlinie/Niveaulinie* $\mathcal{N}_c(f)$ der Funktion f zum Wert $c \in \mathbb{R}$ bezeichnet man die Menge

$$\mathcal{N}_c(f) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in D \,|\, f(x_1, \ldots, x_n) = c\}. \;\subseteq \mathbb{R}^n$$

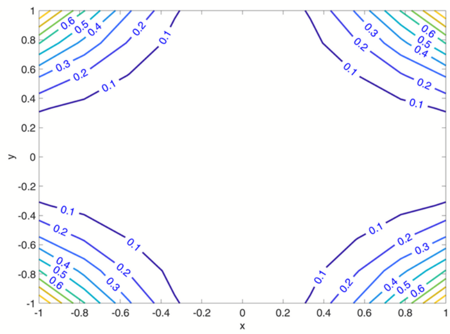
7

Beispiele

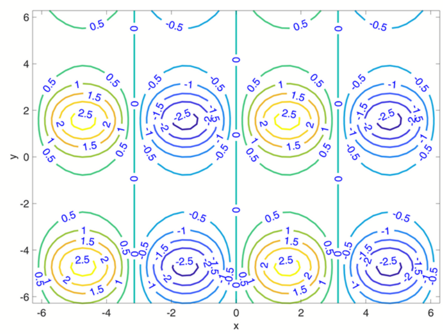
8



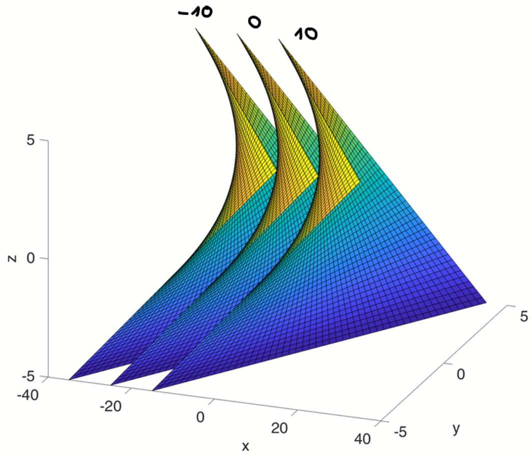
$f(x,y) = \sin(x) \cdot y$



$f(x,y) = x^2 \cdot y^2$



$f(x,y) = \sin(x) \cdot e^{\sin(y)}$



▶ 9

$f(x,y,z) = x + y \cdot z$

Bestimmung der Höhenlinien am Beispiel

▶ 10

$f(x,y) = \sin(x) \cdot y$

für festes $c \in \mathbb{R}$: $N_c(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x,y) = \sin(x) \cdot y = c \}$ Punktepaare implizit beschrieben

1. Fall Bestimmung von $N_0(f) = \{ (x,y) \mid \sin(x) \cdot y = 0 \}$

$(x,y) \in N_0(f) \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \lor y = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z}) \lor y = 0$

$\Leftrightarrow x = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

d.h. $N_0(f) = \{ (k \cdot \pi, y) \mid k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R} \} \cup \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$ explizite Beschreibung

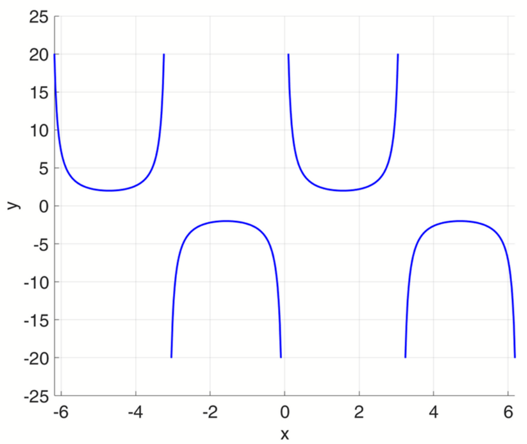
2. Fall Bestimmung von $N_c(f) = \{ (x,y) \mid \sin(x) \cdot y = c \}$ mit $c \neq 0$

$(x,y) \in N_c(f) \Leftrightarrow \sin(x) \cdot y = c \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{c}{\sin(x)}}$ für $x \neq k \cdot \pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

y erklärt als Funktion in x, d.h. $y = y(x)$

damit: $N_c(f) = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{ k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \land y = y(x) = \frac{c}{\sin(x)} \}$

d.h. $N_c(f) \mathrel{\hat{=}} \text{Graph}(y)$ mit $y : \mathbb{R} \setminus \{ k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \}, x \mapsto y(x) = \frac{c}{\sin(x)} \}$



$y(x) = \frac{2}{\sin(x)}$

▶ 11

Bemerkung: für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist $N_c(f) = \{ (x,y) \mid f(x,y) = c \}$ eine implizite Definition einer Funktion $y : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$ durch die Beziehung

$f(x, y(x)) = c$ i.A. nichtlineare Gleichung