# II.) reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher

▶ 1

Untersuchungsobjekt:

- $f: D \subseteq \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R},\ (x_1,\ldots,x_n) \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)$
- $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$

$\ulcorner\ \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$\quad \shortparallel$

$\underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} = \{ (x_1,\ldots,x_n) \mid x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R} \}\lrcorner$

**Beispiele**

i) $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = \sin(x)\cdot y$ $\quad : f(\frac{\pi}{2}, 4) = \sin(\frac{\pi}{2})\cdot 4 = 1\cdot 4 = 4$
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(4, \frac{\pi}{2}) = \sin(4)\cdot\frac{\pi}{2}$

ii) $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x + y\cdot z$ $\quad : f(1,2,3) = 1 + 2\cdot 3 = 7$
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(-2,3,8) = -2 + 3\cdot 8 = 22$

iii) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_2$

## Funktionsgraph & Höhenlinie

**Definition** (Funktionsgraph)

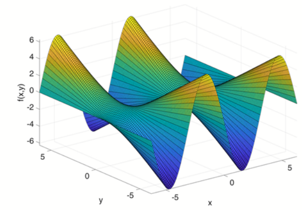
Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsmenge $D \subseteq \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ mal}}$

Als *Funktionsgraph* (oder *Graph*) der Funktion $f$ bezeichnet man die Menge

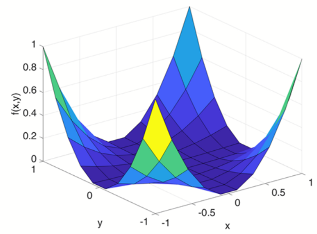
$$\operatorname{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}. \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

**Bemerkung:** für $n = 2$, d.h. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist $\operatorname{Graph}(f) \subset \mathbb{R}^3$ und lässt sich in einer sog. Oberflächendarstellung veranschaulichen

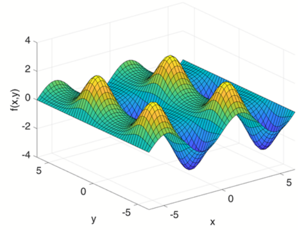
**Beispiele**



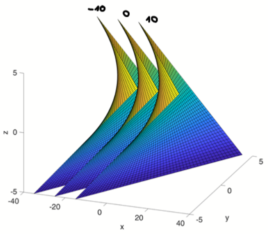
$f(x,y) = \sin(x)\cdot y$



$f(x,y) = x^2\cdot y^2$



$f(x,y) = \sin(x)\cdot e^{\sin(y)}$



$f(x,y,z) = x + y\cdot z$

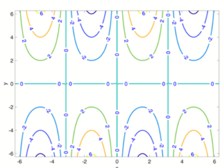
**Definition** (Höhenlinie, Niveaulinie)

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsmenge $D \subseteq \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ mal}}$

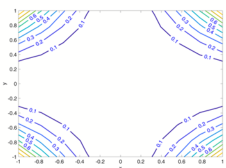
Als *Höhenlinie*/*Niveaulinie* $\mathcal{N}_c(f)$ der Funktion $f$ zum Wert $c \in \mathbb{R}$ bezeichnet man die Menge

$$\mathcal{N}_c(f) := \{(x_1,\ldots,x_n) \in D \mid f(x_1,\ldots,x_n) = c\}. \subseteq \mathbb{R}^n$$

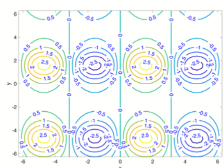
**Beispiele**



$f(x,y) = \sin(x)\cdot y$



$f(x,y) = x^2\cdot y^2$



$f(x,y) = \sin(x)\cdot e^{\sin(y)}$

## Bestimmung der Höhenlinien am Beispiel

$f(x,y) = \sin(x)\cdot y$

für festes $c \in \mathbb{R}$: $N_c(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid f(x,y) = \sin(x)\cdot y = c \}$ Punktepaare implizit beschrieben

**1. Fall** Bestimmung von $N_0(f) = \{ (x,y) \mid \sin(x)\cdot y = 0 \}$

$(x,y) \in N_0(f) \Leftrightarrow \underbrace{\sin(x) = 0}_{\Leftrightarrow x = k\cdot\pi \text{ mit } k\in\mathbb{Z}} \vee y = 0 \Leftrightarrow x = k\cdot\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \vee y = 0$

d.h. $N_0(f) = \{ (k\cdot\pi, y) \mid k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R} \} \cup \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$ explizite Beschreibung

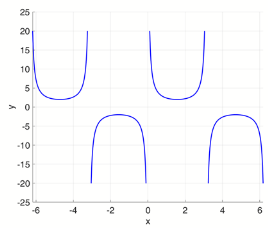
**2. Fall** Bestimmung von $N_c(f) = \{ (x,y) \mid \sin(x)\cdot y = c \}$ mit $c \neq 0$

$(x,y) \in N_c(f) \Leftrightarrow \sin(x)\cdot y = c \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{c}{\sin(x)}}$ für $x \neq k\cdot\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$y$ erklärt als Funktion in $x$, d.h. $y = y(x)$

damit: $N_c(f) = \{ (x,y) \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \wedge y = y(x) = \frac{c}{\sin(x)} \}$

d.h. $N_c(f) \triangleq \operatorname{Graph}(y)$ mit $y: \mathbb{R}\setminus\{k\cdot\pi \mid k\in\mathbb{Z}\},\ x \mapsto y(x) = \frac{c}{\sin(x)}\}$



$y(x) = \frac{2}{\sin(x)}$

**Bemerkung:** für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist $N_c(f) = \{ (x,y) \mid f(x,y) = c \}$ eine implizite Definition einer Funktion $y: \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ durch die Beziehung

$f(x, y(x)) = c$ $\quad$ i.A. nichtlineare Gleichung

## Zusammenhang mit Parameterfunktionen

▶ 2 ▶ 3

Beobachtung: bei gegebener Funktion $f: \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

erhält man durch „Festhalten" von je $n-1$ Veränderlichen

eine parametrisierte Funktion <u>einer</u> freien Veränderlichen:

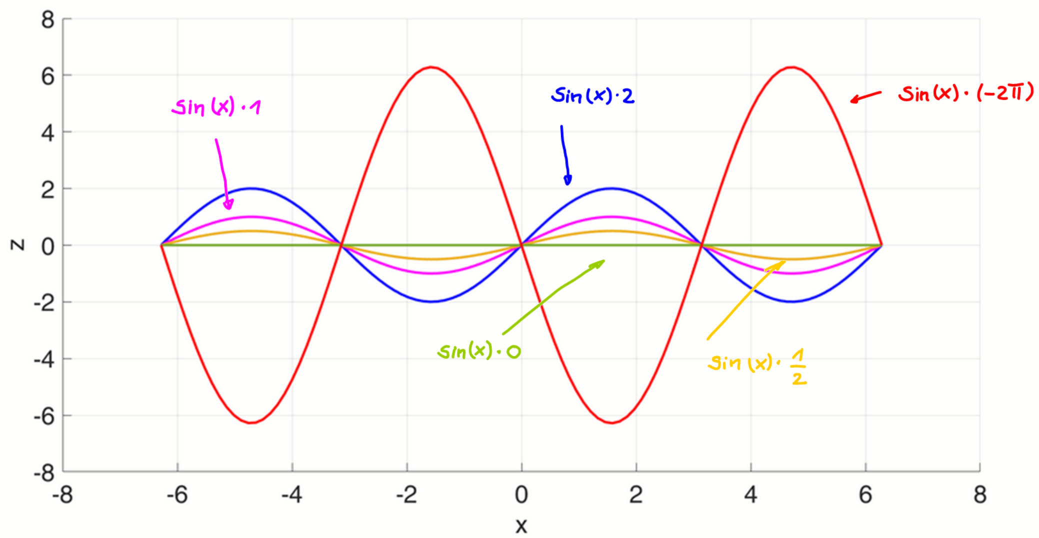
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x_k \mapsto f(\boxed{x_1}, \dots, \boxed{x_{k-1}}, \boxed{x_k}, \boxed{x_{k+1}}, \dots, \boxed{x_n}) \qquad \text{für } k \in \{1, \dots, n\}$$

Konstante Werte     freie Veränderliche

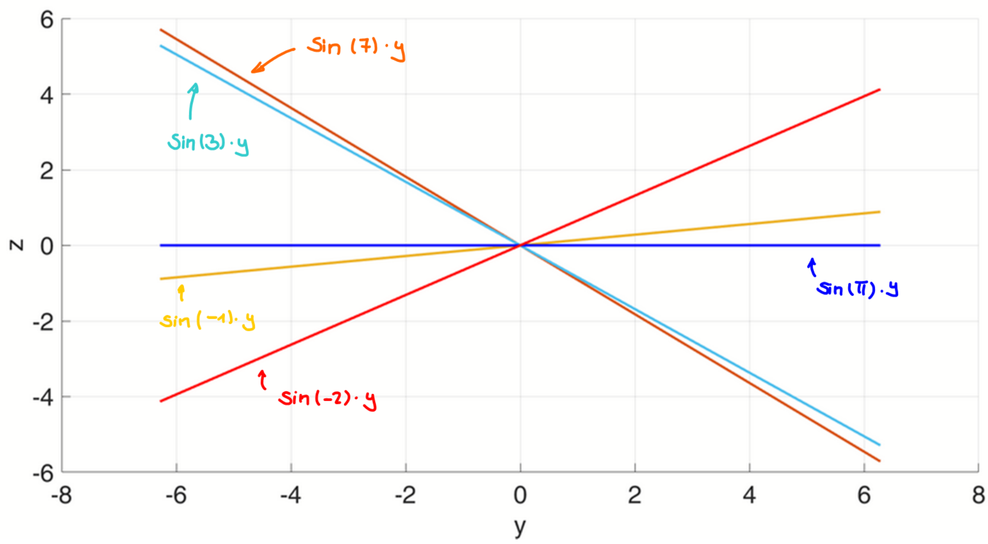
**Beispiele:**

mit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(x) \cdot y$

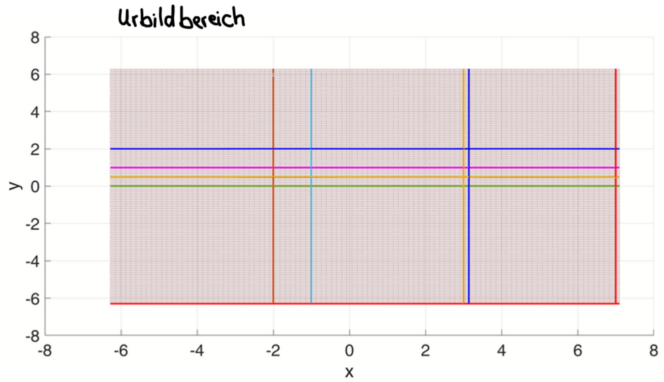
- für festes $y \in \mathbb{R}$: Funktion in $x$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sin(x) \cdot \boxed{y}$ ▶ 4



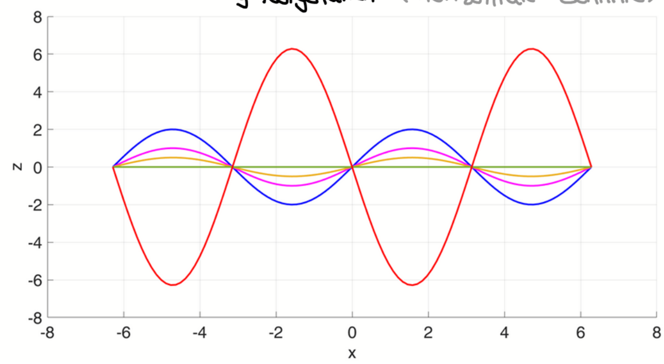

- für festes $x \in \mathbb{R}$: Funktion in $y$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ y \mapsto \sin(\boxed{x}) \cdot y$ ▶ 5



Urbildbereich

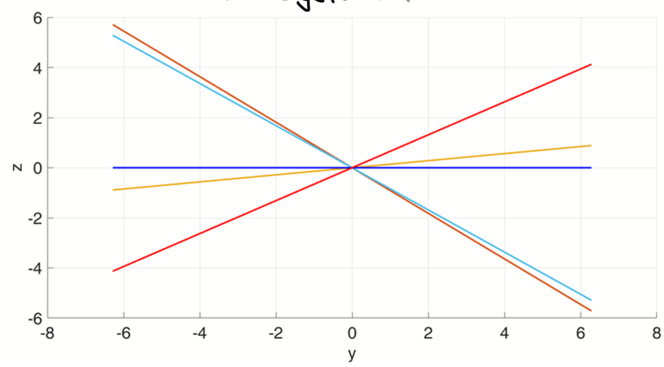



y festgehalten (horizontale Schnitte)




▶ 6

x festgehalten (vertikale Schnitte)




**Stetigkeit:**

▶ 7

- Stetigkeit an einer Stelle $\vec{x}^{\,0}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig an einer Stelle $\vec{x}^{\,0}$ $:\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^{\,0}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^{\,0})$

bedeutet: alle Folgen $(\vec{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} \vec{x}_m = \vec{x}^{\,0}$

▶ 9

mit $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ & $\vec{x}_m = (x_{m,1}, \dots, x_{m,n})$ also

$\lim\limits_{m\to\infty} x_{m,1} = x_1^0 \;\wedge \dots \wedge\; \lim\limits_{m\to\infty} x_{m,n} = x_n^0$

? ~~Idee: $f$ stetig an $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim\limits_{x_k \to x_k^0} f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) = f(\vec{x}^{\,0}) \;\forall k \in \{1,\dots,n\}$~~

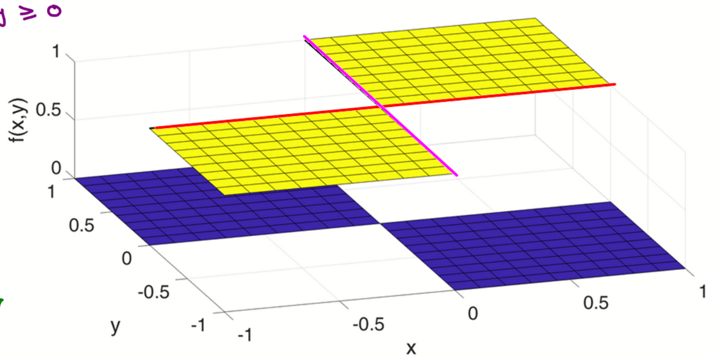
▶ 8

~~wobei $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, \dots, x_n^0)$~~

▶ 10

**Beispiel:**

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x\cdot y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$




Stetigkeit an $(0,0)$

nach Idee:

- $y=0$ fest: $g(x) = f(x,0) = 1$

  $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$

- $x=0$ fest: $h(y) = f(0,y) = 1$

  $\Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} h(y) = 1$

- $f(0,0) = 1$

$=$

dennoch: $f$ nicht stetig an der Stelle $(0,0)$

man sieht die Nicht-Stetigkeit an $(0,0)$ folgendermaßen:

mit $(x_m, y_m) = \left(\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}\right)$ ist

- $\lim\limits_{m\to\infty} (x_m, y_m) = (0,0)$
- $f(x_m, y_m) = 0$ denn $x_m \cdot y_m = \frac{1}{m} \cdot \left(-\frac{1}{m}\right) = -1 \cdot \underbrace{\frac{1}{m^2}}_{>0} < 0$

somit $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_m, y_m) = 0 \neq f(0,0)$

d.h. $f$ ist an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig.

Stetigkeit auf einer Teilmenge / Gebiet des $\mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n :\Longleftrightarrow f$ stetig an jeder Stelle $\vec{x}^0 \in G$.

▶ 11