Zur Differentiation

Definition (partielle Ableitung, Gradient)

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Für eine feste Auswertestelle $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in D$ nennt man, falls der jeweilige Grenzwert existiert

$$f_{x_k}(\hat{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x}) \quad (\blacksquare)$$

$$:= \lim_{h\to 0} \frac{f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k + h, \hat{x}_{k+1}, \ldots, \hat{x}_n) - f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \ldots, \hat{x}_n)}{h} \quad (*)$$

die *(erste) partielle Ableitung nach x_k von f in $\hat{x}$* (für $k \in \{1, \ldots, n\}$).

Falls alle partiellen Ableitungen in $\hat{x}$ existieren, so nennt man

$$\nabla f(\hat{x}) := \text{grad}(f)(\hat{x}) := (f_{x_1}(\hat{x}), \ldots, f_{x_n}(\hat{x}))^T \in \mathbb{R}^n$$

den *Gradienten von f in $\hat{x}$*. ∇ wird als *Nabla-Operator* bezeichnet.

Existieren alle partiellen Ableitungen in $\hat{x}$ und sind stetig, so nennt man f *stetig partiell differenzierbar*.

mit Hilfsfunktion $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g_k(x) = f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-1}, x, \hat{x}_{k+1}, \ldots, \hat{x}_n)$$

$$(*) : \lim_{h\to 0} \frac{g_k(\hat{x}_k + h) - g_k(\hat{x}_k)}{h}$$

$$(\blacksquare) : \frac{dg_k}{dx}(\hat{x}_k) = g_k'(\hat{x}_k)$$

Beispiele

i) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \ (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto x_1 \cdot x_2^2 \cdot \cos(x_3 \cdot x_4)$

Auswertestelle: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (1, -1, 2, -3)$

$$f(1,-1,2,-3) = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \cos(2\cdot(-3)) = \cos(-6)$$

- 1. Partielle Ableitung nach x_1:

$$f_{x_1}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) = \hat{x}_2^2 \cdot \cos(\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_4) = \cos(-6)$$

- 1. partielle Ableitung nach x_2:

$$f_{x_2}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) = 2 \cdot \hat{x}_1 \cdot \cos(\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_4) \cdot \hat{x}_2 = 2 \cdot 1 \cdot \cos(-6) \cdot (-1) = -2 \cdot \cos(-6)$$

- 1. partielle Ableitung nach x_3:

$$f_{x_3}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2^2 \cdot \hat{x}_4 \ (-1) \cdot \sin(\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_4)$$

$$= -\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2^2 \cdot \hat{x}_4 \cdot \sin(\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_4) = -1 \ (-1)^2 \cdot (-3) \cdot \sin(2 \cdot (-3))$$

$$= +3 \cdot \sin(-6)$$

- 1. partielle Ableitung nach x_4:

$$f_{x_4}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) = \frac{\partial f}{\partial x_4}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2^2 \cdot \hat{x}_3 \cdot (-1) \sin(\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_4)$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot 2 \ (-1) \cdot \sin(2 \cdot (-3)) = -2 \cdot \sin(-6)$$

Gradient:

$$\nabla f(1,-1,2,-3) = \text{grad}(f)(1,-1,2,-3) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) \\ f_{x_2}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) \\ f_{x_3}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) \\ f_{x_4}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-6) \\ -2 \cdot \cos(-6) \\ 3 \sin(-6) \\ -2 \cdot \sin(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9602 \\ -1.9203 \\ 0.8382 \\ -0.5588 \end{pmatrix}$$

ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x \cdot \sin(y)$

- partielle Ableitungen:

▶ 10

  - $f_x(x,y) = \sin(y)$
  - $f_y(x,y) = x \cdot \cos(y)$

- Gradient:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ x \cdot \cos(y) \end{pmatrix}$$

z.B. $\nabla f(1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \sin(\pi/2) \\ 1 \cdot \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (a,b,c) \mapsto a^b \cdot c$

▶ 11

- partielle Ableitungen

  - $g_a(a,b,c) = \frac{\partial g}{\partial a}(a,b,c) = b \cdot a^{b-1} \cdot c$
  - $g_b(a,b,c) = \frac{\partial g}{\partial b}(a,b,c) = \ln(a) \cdot e^{b \cdot \ln(a)} \cdot c$

    $= \ln(a) \cdot a^b \cdot c$
  - $g_c(a,b,c) = \frac{\partial g}{\partial c}(a,b,c) = a^b$

NR:

$g(a,b,c) = a^b \cdot c$

$= e^{\ln(a^b)} \cdot c$

$= e^{b \cdot \ln(a)} \cdot c$

- Gradient:

$$\nabla g(a,b,c) = \operatorname{grad}(g)(a,b,c) = \begin{pmatrix} b \cdot a^{b-1} \cdot c \\ \ln(a) \cdot a^b \cdot c \\ a^b \end{pmatrix}$$

▶ 12

Bemerkung (höhere partielle Ableitungen)

Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist (falls existent) $f_{x_k}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die ebenfalls partiell abgeleitet werden kann:

$$\frac{\partial f_{x_k}}{\partial x_e}(x_1, .., x_n) = \frac{\partial}{\partial x_e} f_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_e} \frac{\partial}{\partial x_k} f = \frac{\partial^2}{\partial x_e \partial x_k} f = \boxed{f_{x_k x_e}(x_1, .., x_n)}$$

2. Partielle Ableitung von f
zuerst nach x_k, dann nach x_e

mit $f_{x_k x_e}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ergibt sich die 3. partielle Ableitung: $f_{x_k x_e x_m}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ usw.

Beispiel $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x \cdot \sin(y)$

- erste partielle Ableitungen: $f_x(x,y) = \sin(y)$ & $f_y(x,y) = x \cdot \cos(y)$
- zweite partielle Ableitungen: $f_{xx}(x,y) = 0$, $f_{xy}(x,y) = \cos(y)$ $\overset{(=)}{\longleftrightarrow}$ $f_{yx}(x,y) = \cos(y)$, $f_{yy}(x,y) = -x \cdot \sin(y)$
- dritte partielle Ableitungen:

$f_{xxx}(x,y) = 0$, $f_{xxy}(x,y) = 0$ $(=)$ $f_{yxx}(x,y) = 0$, $f_{yxy}(x,y) = -\sin(y)$

$f_{xyx}(x,y) = 0$, $f_{xyy}(x,y) = -\sin(y)$ $(=)$ $f_{yyx}(x,y) = -\sin(y)$, $f_{yyy}(x,y) = -x \cdot \cos(y)$

Beobachtung:
manchmal ist die Reihenfolge der partiellen Differentiation nicht von Bedeutung

Begründung:

Satz (Satz von Schwarz) ▶ 13

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet.

Ist $f: D \to \mathbb{R}$ auf D nach zweimal partiell differenzierbar und sind alle zweiten partiellen Ableitungen stetig in $\hat{x} \in D$, dann gilt für alle $k, l \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(\hat{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(\hat{x}) \quad (*)$$

$(*)$: $f_{x_l x_k}(\hat{x}) = f_{x_k x_l}(\hat{x})$ gilt fast immer

Die zweiten partiellen Ableitungen werden in der zumeist symmetrischen Hesse-Matrix festgehalten

Definition (Hesse-Matrix) ▶ 14

Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in $\hat{x}$, dann definiert man die *Hesse-Matrix* von f in $\hat{x}$ als

$$H_f(\hat{x}) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\hat{x}) & \ldots & f_{x_1x_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\hat{x}) & \ldots & f_{x_nx_n}(\hat{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Beispiele ▶ 15

i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x \cdot \sin(y)$

- erste partielle Ableitungen: $f_x(x,y) = \sin(y)$ & $f_y(x,y) = x \cdot \cos(y)$
- zweite partielle Ableitungen: $f_{xx}(x,y) = 0$, $f_{xy}(x,y) = \cos(y)$, $f_{yx}(x,y) = \cos(y)$, $f_{yy}(x,y) = -x \cdot \sin(y)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(y) \\ \cos(y) & -x \cdot \sin(y) \end{pmatrix}$$

ii) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (a,b,c) \mapsto a^b \cdot c$

▶ 16

- erste partielle Ableitungen
  - $g_a(a,b,c) = \frac{\partial g}{\partial a}(a,b,c) = b \cdot a^{b-1} \cdot c$
  - $g_b(a,b,c) = \frac{\partial g}{\partial b}(a,b,c) = \ln(a) \cdot e^{b \cdot \ln(a)} \cdot c$
    $= \ln(a) \cdot a^b \cdot c$
  - $g_c(a,b,c) = \frac{\partial g}{\partial c}(a,b,c) = a^b$

- Zweite partielle Ableitungen

1.) ausgehend von $g_a(a,b,c) = b \cdot a^{b-1} \cdot c = b \cdot e^{(b-1) \cdot \ln(a)} \cdot c$

- $g_{aa}(a,b,c) = b \cdot (b-1) \cdot a^{b-1} \cdot c$
- $g_{ab}(a,b,c) = e^{(b-1) \cdot \ln(a)} \cdot c + b \cdot \ln(a) \cdot e^{(b-1) \cdot \ln(a)} \cdot c$
  $= a^{b-1} \cdot c + b \cdot \ln(a) \cdot a^{b-1} \cdot c$
- $g_{ac}(a,b,c) = b \cdot a^{b-1}$

2.) ausgehend von $g_b(a,b,c) = \ln(a) \cdot e^{b \cdot \ln(a)} \cdot c$

- $g_{ba}(a,b,c) = g_{ab}(a,b,c)$

  Hier zur Übung:

  $g_{ba}(a,b,c) = \frac{1}{a} \cdot e^{b \cdot \ln(a)} \cdot c + \ln(a) \cdot b \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{b \cdot \ln(a)} \cdot c$

  $= \frac{1}{a} \cdot a^b \cdot c + \ln(a) \cdot b \cdot a^{-1} \cdot a^b \cdot c = a^{b-1} \cdot c + \ln(a) \cdot b \cdot a^{b-1} \cdot c$

  $\stackrel{?}{=}$ ✓

- $g_{bb}(a,b,c) = \ln(a) \cdot \ln(a) \cdot e^{b \cdot \ln(a)} \cdot c = (\ln(a))^2 \cdot a^b \cdot c$
- $g_{bc}(a,b,c) = \ln(a) \cdot e^{b \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^b$

3.) ausgehend von $g_c(a,b,c) = a^b = e^{b \cdot \ln(a)}$

- $g_{ca}(a,b,c) = g_{ac}(a,b,c)$

  Hier zur Kontrolle / Übung

  $g_{ca}(a,b,c) = b \cdot a^{b-1}$

- $g_{cb}(a,b,c) = g_{bc}(a,b,c)$

  Hier zur Kontrolle / Übung

  $g_{cb}(a,b,c) = \ln(a) \cdot e^{b \cdot \ln(a)} = \ln(a)\, a^b$

- $g_{cc}(a,b,c) = 0$

$\stackrel{?}{=}$

$\stackrel{?}{=}$

Hesse-Matrix:

$$H_g(a,b,c) = \begin{pmatrix} b\cdot(b-1)\cdot a^{b-1}\cdot c & a^{b-1}\cdot c + b\cdot \ln(a)\cdot a^{b-1}\cdot c & b\cdot a^{b-1} \\ a^{b-1}\cdot c + b\cdot \ln(a)\cdot a^{b-1}\cdot c & (\ln(a))^2\cdot a^b\cdot c & \ln(a)\cdot a^b \\ b\cdot a^{b-1} & \ln(a)\cdot a^b & 0 \end{pmatrix}$$