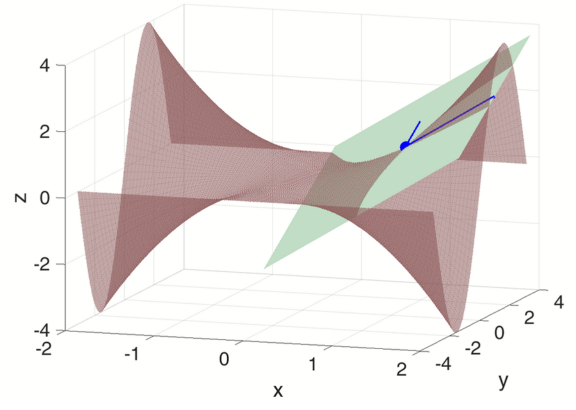


Wiederholung / Erinnerung ▶ 1

Tangentialebene T für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $(\hat{x}, \hat{y})$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto z := T(x,y)$

$T(x,y) = f(\hat{x},\hat{y}) + f_x(\hat{x},\hat{y})(x-\hat{x}) + f_y(\hat{x},\hat{y})(y-\hat{y})$

Beispiel:

$f(x,y) = x^2 \cdot \sin(y)$

- Berührpunkt $(\hat{x},\hat{y}) = (1,1)$
- $f(1,1) = \sin(1)$
- $f_x(\hat{x},\hat{y}) = 2\hat{x} \cdot \sin(\hat{y}) = 2 \cdot \sin(1)$
- $f_y(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}^2 \cdot \cos(\hat{y}) = \cos(1)$

$T(x,y) = \sin(1) + 2\sin(1)(x-1) + \cos(1)(y-1)$

▶ 2 : Fragestellung : Richtungsableitung (nur Video)

Die Kettenregel im Mehrdimensionalen ▶ 3

Erinnerung : Kettenregel im Skalaren

gegeben: $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit g differenzierbar in $\hat{x}$ & f differenzierbar in $g(\hat{x})$

damit ist $h := f \circ g$ mit $h(x) = f(g(x))$ in $\hat{x}$ differenzierbar

mit $h'(\hat{x}) = f'(g(\hat{x})) \cdot g'(\hat{x})$

Beispiel :

$f(x) = x \cdot \sin(x)$, $g(x) = x^2$

damit $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 \cdot \sin(x^2)$

mit $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$ & $g'(x) = 2x$

ist $h'(x) = \left(\sin(x^2) + x^2 \cdot \cos(x^2)\right) \cdot 2x = 2x\sin(x^2) + 2 \cdot x^3 \cos(x^2)$

Wir betrachten im Weiteren Verkettungen von

Innen : vektorwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen

und

Außen : reellwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher

es ergeben sich reelle Funktionen ▶ 4

Beispiel

i) innere Funktion: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto \varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ ▶ 5

äußere Funktion: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 \cdot \sin(y)$

Verkettung: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto g(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = f(t, t^2) = t^2 \cdot \sin(t^2)$

ii) innere Funktion: $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^4, \ t \mapsto \varphi(t) = \left(2t, \frac{1}{t}, \sin(t), \cos(t)\right)^T$ ▶ 6

äußere Funktion: $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 \cdot x_2 + x_3^2 + x_4^2$

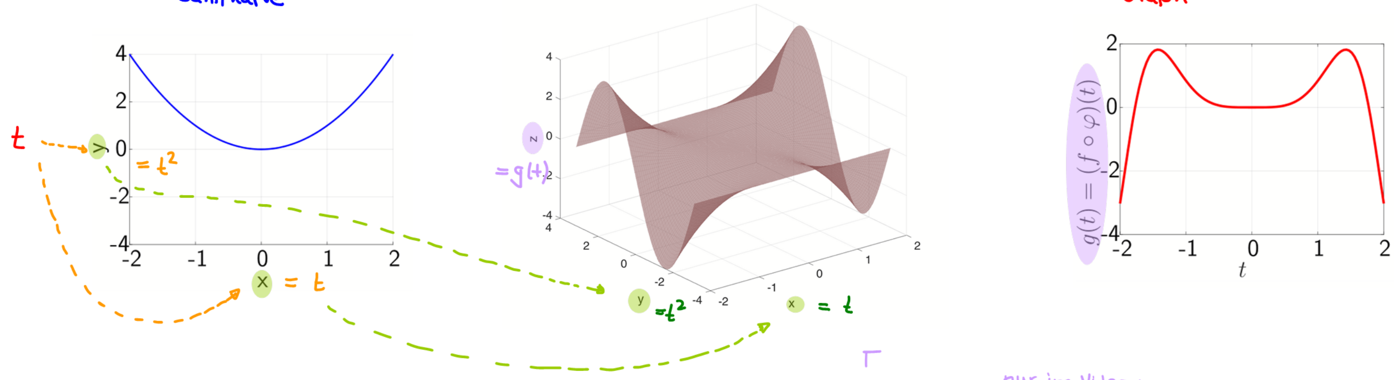
Verkettung: $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ t \mapsto g(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = f\left(2t, \frac{1}{t}, \sin(t), \cos(t)\right)$

$= (2t)^2 \cdot \frac{1}{t} + \sin^2(t) + \cos^2(t) = 4t + 1$

Veranschaulichung für i) $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $f(x,y) = x^2 \cdot \sin(y)$, $g(t) = (f \circ \varphi)(t) = t^2 \cdot \sin(t^2)$

▶ 7

Bahnkurve   Oberflächengraph   Graph



▶ 8

nur im Video:

Verkettungen in der Realität: Streckenprofile

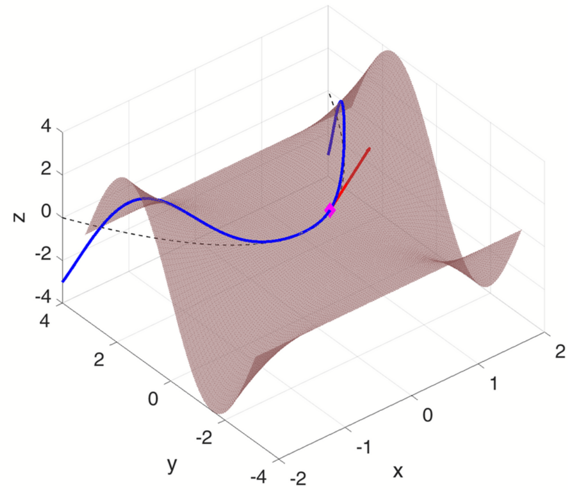
Durch $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ensteht mittels $f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Pfad $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $t \mapsto \gamma(t) := \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ (f \circ \varphi)(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \in \mathbb{R}^n \\ \leftarrow \in \mathbb{R} \end{matrix}$

im Beispiel: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \cdot \sin(t^2) \end{pmatrix}$

▶ 9

für z.B $t = 0.5$

ergibt sich $\gamma(0{,}5) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \cdot \sin(0{,}25) \end{pmatrix}$



▶ 10

und mit $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t\sin(t^2) + 2t^3\cos(t^2) \end{pmatrix}$

$$\gamma'(0{,}5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sin(0{,}25) + 0{,}25 \cdot \cos(0{,}25) \end{pmatrix}$$

allgemein $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ (f \circ \varphi)'(t) \end{pmatrix}$ ← Ableitung einer Verkettung

▶ 11

Satz (allgemeine Kettenregel)

Es sei

$$g = f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto g(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$$

die Verknüpfung der reellwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mehrerer Veränderlicher mit der vektorwertigen Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ einer Veränderlichen.

Dann gilt für die Ableitung der Funktion g an der Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$g'(t_0) := \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t_0) = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) \rangle = (\nabla f(\varphi(t_0)))^T \cdot \varphi'(t_0)$$

Bemerkung: Kettenregel $\hat{=}$ „äußere Ableitung" · „innere Ableitung"

Beispiele

i) $\varphi(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $f(x,y) = x^2 \cdot \sin(y)$, $g(t) = (f \circ \varphi)(t) = t^2 \cdot \sin(t^2)$ ▶ 12

- äußere Funktion: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\sin(y) \\ x^2 \cdot \cos(y) \end{pmatrix}$

- innere Funktion: $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

nach Kettenregel $g'(t) = \left\langle \begin{pmatrix} 2t\sin(t^2) \\ t^2 \cdot \cos(t^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle = 2t \cdot \sin(t^2) \cdot 1 + t^2 \cdot \cos(t^2) \cdot 2t$

$= 2t \cdot \sin(t^2) + 2t^3 \cos(t^2)$

ii) innere Funktion: $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^4$, $t \mapsto \varphi(t) = \left(2t, \frac{1}{t}, \sin(t), \cos(t)\right)^T$ ▶ 13

äußere Funktion: $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 \cdot x_2 + x_3^2 + x_4^2$

Verkettung: $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = f\left(2t, \frac{1}{t}, \sin(t), \cos(t)\right)$

$= (2t)^2 \cdot \frac{1}{t} + \sin^2(t) + \cos^2(t) = 4t + 1$

- Gradient von f:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, \dots, x_4) \\ f_{x_2}(x_1, \dots, x_4) \\ f_{x_3}(x_1, \dots, x_4) \\ f_{x_4}(x_1, \dots, x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \cdot x_2 \\ x_1^2 \\ 2x_3 \\ 2x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla f(\varphi(t)) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2t \cdot 1/t \\ (2t)^2 \\ 2 \cdot \sin(t) \\ 2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4t^2 \\ 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

- Ableitung von $\varphi(t) = \left(2t, \frac{1}{t}, \sin(t), \cos(t)\right)^T$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -t^{-2} \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g'(t) = (f \circ \varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 4t^2 \\ 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -t^{-2} \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$= 4 \cdot 2 + 4\cancel{t^2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\cancel{t^2}} + \cancel{2\sin(t) \cdot \cos(t)} + \cancel{2 \cdot \cos(t) (-\sin(t))}$

$= 8 - 4 = 4$

Die Richtungsableitung

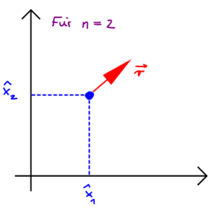
▶ 14

Definition (Richtungsableitung)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Zudem sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf D partiell differenzierbar.

Für $\hat{x} \in D$ und $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{r}\| = 1$ ist die *Richtungsableitung* von f in $\hat{x}$ in *Richtung* $\vec{r}$ definiert als

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\hat{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x} + h \cdot \vec{r}) - f(\hat{x})}{h}$$



Bemerkungen:

- $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\hat{x})$ ist ein Maß für die Änderung von f bei Veränderung von $\hat{x}$ in Richtung $\vec{r}$
- $f_{x_k}(\hat{x}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(\hat{x})$ mit $\vec{e}_k = (0,..,0,\underset{\uparrow k}{1},0,..,0)^T \in \mathbb{R}^n$

Man kann zeigen, dass

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\hat{x}) = \langle \nabla f(\hat{x}), \vec{r} \rangle = (\nabla f(\hat{x}))^T \cdot \vec{r}}$$

(via Kettenregel)

▶ 15

Das bedeutet:

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist

Koeffizienten

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\hat{x}) = \left\langle \begin{pmatrix} f_{x_1}(\hat{x}) \\ f_{x_2}(\hat{x}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\hat{x}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{r_1 \cdot f_{x_1}(\hat{x}) + r_2 \cdot f_{x_2}(\hat{x}) + \ldots + r_n \cdot f_{x_n}(\hat{x})}_{\text{Linearkombination der partiellen Ableitungen}}$$

partielle Ableitungen

Somit gilt insbesondere für $n = 2$:

alle Tangentialgeraden liegen in einer Ebene: Tangentialebene

▶ 16

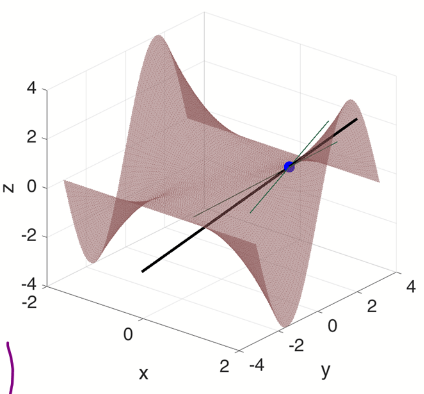
Beispiel:

▶ 17

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 \cdot \sin(y)$

Berührpunkt: $P = (\hat{x} \,|\, \hat{y} \,|\, f(\hat{x},\hat{y})) = (1 \,|\, 1 \,|\, \sin(1))$

$\hat{x} = 1$,
$\hat{y} = 1$



gesucht: Tangente an f in P in Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtungsableitung: Vorbereitung: $\vec{r}_{norm} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_{norm}}(\hat{x},\hat{y}) = \left\langle \begin{pmatrix} f_x(\hat{x},\hat{y}) \\ f_y(\hat{x},\hat{y}) \end{pmatrix}, \vec{r}_{norm} \right\rangle$$

mit $f_x(x,y) = 2\hat{x} \cdot \sin(\hat{y}) = 2 \cdot \sin(1)$

$f_y(x,y) = \hat{x}^2 \cdot \cos(\hat{y}) = \cos(1)$

somit $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_{norm}}(1,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2\sin(1) \\ \cos(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sin(1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(1)$

somit Richtungsvektor der Tangentialgerade

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{r}_{norm} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_{norm}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \cdot \sin(1) + 1/\sqrt{2} \cdot \cos(1) \end{pmatrix}$$

also Tangentialgerade:

$$t_{\vec{r}} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{p} + \alpha \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sin(1) \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \cdot \sin(1) + 1/\sqrt{2} \cdot \cos(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sin(1) \end{pmatrix} + \tilde{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\sin(1) + \cos(1) \end{pmatrix}$$

Das vollständige / totale Differential

▶ 18

Hintergrund: Linearisierung einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Erinnerung skalarer Fall ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

▶ 19

$$\frac{df(\hat{x})}{dx} = f'(\hat{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x}+h) - f(\hat{x})}{h} \quad \longleftarrow \text{qualitativ: Relation von Funktionswert \& Argumentwert}$$

Differential von f an der Stelle $\hat{x}$

bzw. $df(\hat{x}) = f'(\hat{x}) \cdot dx$

infinitesimale Änderung in x (ausgehend von $\hat{x}$)

Infinitesimale Änderung des Funktionswertes von f

hervorgerufen durch

ist proportional zur

mit Proportionalitätsfaktor $f'(\hat{x})$

dann ist $f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x}) \approx f'(\hat{x}) \cdot \Delta x$

daher: Idee f durch Tangente annähern

mit $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto t(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$ Linearisierung von f um $\hat{x}$

ist $t(x) \approx f(x)$ wenn $x \approx \hat{x}$

allgemeiner Fall: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Problem: Argument x nicht skalar $\Rightarrow$ dx nicht skalar sondern vektoriell)

Definition (totales / vollständiges Differential)

▶ 20

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Zudem sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf D partiell differenzierbar.

Für $\vec{dx} = (dx_1, \ldots, dx_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\hat{x} \in D$ nennt man

$$\begin{aligned} df(\hat{x}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\hat{x}) \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\hat{x}) \cdot dx_n \\ &= \left\langle \nabla f(\hat{x}), \vec{dx} \right\rangle \\ &= (\nabla f(\hat{x}))^T \cdot \vec{dx} \end{aligned}$$

das *vollständige* (oder *totale*) *Differential* von f in $\hat{x}$

Bemerkungen:

i) sind alle partiellen Ableitungen stetig in $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dann existiert $df(\hat{x})$.
Man nennt dann f differenzierbar in $\hat{x}$.

ii) Die lineare Abbildung

$$\langle \nabla f(\hat{x}), \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \vec{v} \mapsto \langle \nabla f(\hat{x}), \vec{v} \rangle$$

die einem Vektor $\vec{v}$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\hat{x})$ zuweist heißt Ableitung von f in $\hat{x}$.
In der Standardbasis wird diese durch die Matrix $(\nabla f(\hat{x}))^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ dargestellt.

Zur Linearisierung

▶ 21

Die Tangente im Skalaren Fall geht über in

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1,..,x_n) \mapsto T(x_1,..,x_n) = f(\hat{x}_1,..,\hat{x}_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\hat{x}_1,..,\hat{x}_n)\cdot(x_k-\hat{x}_k)$$

bzw.: $T(\vec{x}) = f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), \vec{x}-\hat{x} \rangle$

für $n=2$ ergibt sich die Tangentialebene

$$T(x,y) = f(\hat{x},\hat{y}) + f_x(\hat{x},\hat{y})\cdot(x-\hat{x}) + f_y(\hat{x},\hat{y})\cdot(y-\hat{y})$$

Nutzen: für $(x_1,..,x_n) \approx (\hat{x}_1,..,\hat{x}_n)$ ist $f(x_1,..,x_n) \approx T(x_1,..,x_n)$

einfacher handzuhaben

Beispiel:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = e^x \cdot \sin(y) + \cos(y\cdot z)$ (*)

▶ 22

mit $(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = (1,0,2)$

ist $f(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = e^1\cdot\sin(0) + \cos(0\cdot 2) = 1$

und $f_x(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = e^{\hat{x}}\cdot\sin(\hat{y}) = e^1\cdot\sin(0) = 0$

$f_y(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = e^{\hat{x}}\cdot\cos(\hat{y}) - \hat{z}\cdot\sin(\hat{y}\cdot\hat{z}) = e^1\cdot\cos(0) - 2\cdot\sin(0\cdot 2) = e$

$f_z(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = -\hat{y}\cdot\sin(\hat{y}\cdot\hat{z}) = -0\cdot\sin(0\cdot 2) = 0$

Linearisierung $T(x,y,z) = f(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) + f_x(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\cdot(x-\hat{x}) + f_y(\hat{x},\hat{y},\hat{z})(y-\hat{y}) + f_z(\hat{x},\hat{y},\hat{z})(z-\hat{z})$

$= 1 + 0\cdot(x-1) + e\cdot(y-0) + 0\cdot(z-2)$

$= 1 + e\cdot y \approx f(x,y,z)$ für $(x,y,z) \approx (\hat{x},\hat{y},\hat{z})$

einfacher auszuwerten als (*)