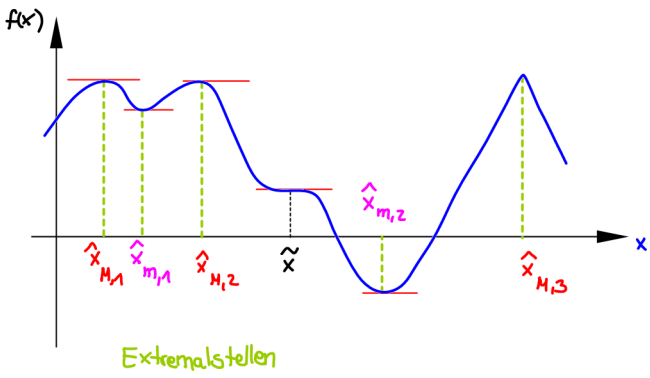
Extremwertberechnung für reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher

Erinnerung: Extremwertbestimmung im skalaren Fall, d.h. $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

▶ 1



- lokales Maximum (•)

  f hat in $\hat{x} \in I$ ein lokales Maximum $:\Leftrightarrow$

  $\exists \varepsilon > 0 : \; f(x) \leq f(\hat{x}) \;\; \forall x \in (\hat{x}-\varepsilon, \hat{x}+\varepsilon)$

- lokales Minimum (•)

  f hat in $\hat{x} \in I$ ein lokales Minimum $:\Leftrightarrow$

  $\exists \varepsilon > 0 : \; f(x) \geq f(\hat{x}) \;\; \forall x \in (\hat{x}-\varepsilon, \hat{x}+\varepsilon)$

▶ 2

Hat f in $\hat{x}$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum dann nennt man $\hat{x}$ Extremalstelle

Auffinden von Extremalstellen:

~~☹ ausprobieren~~

▶ 3

falls $\hat{x}$ eine Extremalstelle ist und falls $f \in C^1((\hat{x}-\varepsilon, \hat{x}+\varepsilon))$ für ein $\varepsilon > 0$ dann ist

$$f'(\hat{x}) = 0 \qquad \text{(Interpretation: waagrechte Tangente)}$$

Beobachtung am Graphen

- $f'(\tilde{x}) = 0$ aber $\tilde{x}$ nicht Extremalstelle
- $\hat{x}_{M,3}$ ist Extremalstelle ohne waagrechte Tangente (hier: f nicht differenzierbar)

d.h. „waagrechte Tangente" ist kein sicheres Zeichen für Extremalstelle

insgesamt liefert „waagrechte Tangente" nur Kandidaten für Extremalstellen mit Differenzierbarkeit

1.) Kandidatensuche – notwendige Bedingung

$$\boxed{\text{Bestimme Stellen } x^* \in I \text{ mit } f'(x^*) = 0}$$

▶ 4

2.) Überprüfung: ist x^* Extremalstelle bzw. welche Art von Extremalstelle

Variante 1: Überprüfen nach Definition via Funktionswerte

Variante 2: Überprüfen eines Vorzeichenwechsels von f' an der Stelle x^*

- VZW von f' von $+$ nach $-$ $\Rightarrow$ x^* ist Stelle eines lokalen Maximums
- VZW von f' von $-$ nach $+$ $\Rightarrow$ x^* ist Stelle eines lokalen Minimums
- kein VZW von f' $\Rightarrow$ x^* ist keine Extremalstelle

Variante 3: hinreichende Bedingung:

Voraussetzung: $f \in C^2((x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon))$ für ein $\varepsilon > 0$

- $f''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ ist Stelle eines lokalen Maximums
- $f''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ ist Stelle eines lokalen Minimums
- $f''(x^*) = 0 \Rightarrow$ weitere Schritte notwendig

Dr. rer. nat. M. Striebel

im Weiteren : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Definition (lokales Maximum, lokales Minimum, Extremalstelle)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}$.

- f hat in $\hat{x} \in D$ ein *lokales Maximum*, wenn es eine offene ε-Umgebung $U_\varepsilon \subset D$ von $\hat{x}$ gibt, mit $f(x) \leq f(\hat{x})\ \forall x \in U_\varepsilon$.
- f hat in $\hat{x} \in D$ ein *lokales Minimum*, wenn es eine offene ε-Umgebung $U \subset D$ von $\hat{x}$ gibt, mit $f(x) \geq f(\hat{x})\ \forall x \in U_\varepsilon$.

Hat f in $\hat{x} \in D$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum, so bezeichnet man $\hat{x}$ als *Extremalstelle* (*Stelle eines Extremums*)

▶ 5

Bemerkung :

offene ε-Umgebung $U_\varepsilon = U_\varepsilon(\hat{x}) = \{ x \in D \mid \|x - \hat{x}\| < \varepsilon \}$

Beispielfunktionen :

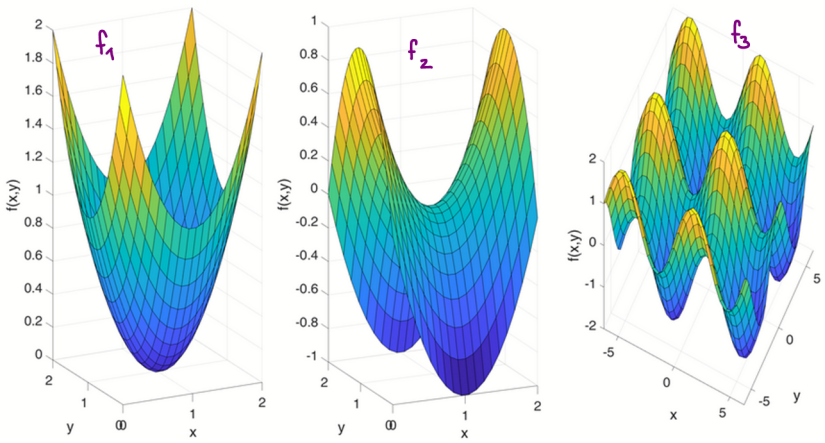
i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f_1(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f_2(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2$

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f_3(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$

iv) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f_4(x,y,z) = 2x^2 - x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z - y + y^3 + z^2$

▶ 6



Dr. rer. nat. M. Striebel

1.) Kandidatensuche: notwendige Bedingung

Satz (Extremalstelle und Gradient)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf D.

Ist $\hat{x} \in D$ Stelle eines lokalen Extremums, dann gilt

$$\nabla f(\hat{x}) = \vec{o} \in \mathbb{R}^n$$

▶ 7

Bemerkungen:

i) gilt für ein $x^* \in D$: $\nabla f(x^*) = \vec{0}$ dann nennt man x^* stationäre Stelle von f

ii) Stationäre Stellen von f sind die Kandidaten für Extremalstellen von f

iii) Bestimmung der stationären Stellen führt i.A. zu nichtlinearen Gleichungssystemen.

notwendige Bedingung: $\boxed{\nabla f(x^*) = \vec{0}}$

▶ 12

Beispiele

i) mit $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$

▶ 8

ergibt sich $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}$

(x^*, y^*) ist stationäre Stelle wenn gilt $\nabla f(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2(x^*-1) \\ 2(y^*-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2(x^*-1) = 0 \wedge 2(y^*-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^* = 1 \wedge y^* = 1$$

eine stationäre Stelle: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) mit $f(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2$

▶ 9

ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ -2(y-1) \end{pmatrix}$

Stationäre Stelle: $\nabla f(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2(x^*-1) \\ -2(y^*-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) mit $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$

▶ 10

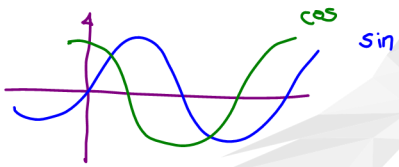
ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(y) \end{pmatrix}$

Stationäre Stelle: $\nabla f(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \cos(x^*) = 0 \wedge -\sin(y^*) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos(x^*) = 0 \wedge \sin(y^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^* = (2\ell+1) \cdot \frac{\pi}{2} \wedge y^* = k \cdot \pi$$

für $\forall\, k, \ell \in \mathbb{Z}$



Dr. rer. nat. M. Striebel

iv) mit $f(x,y,z) = 2x^2 - x\cdot y + 2\cdot x\cdot z - y + y^3 + z^2$

▶ 11

ist $\nabla f(x,y,z) = (4x - y + 2z, -x - 1 + 3y^2, 2x + 2z)^T$

Stationäre Stellen $\nabla f(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)^T$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} ① & 4x^* - y^* + 2z^* = 0 \\ ② & -x^* - 1 + 3(y^*)^2 = 0 \\ ③ & 2x^* + 2z^* = 0 \end{array}\right\} \text{nicht lineares Gleichungssystem}$$

aus ③: $z^* = -x^*$

② : $x^* = 3(y^*)^2 - 1$ $\Rightarrow z^* = -3(y^*)^2 + 1$

in ①: $4(3(y^*)^2 - 1) - y^* + 2(-3(y^*)^2 + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 12(y^*)^2 - 4 - y^* - 6(y^*)^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(y^*)^2 - y^* - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^* = y_1 \vee y^* = y_2$$

mit $y_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \dfrac{1 \pm 7}{12}$, d.h. $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$

1. Stelle:

mit $y^* = \frac{2}{3}$ ist $x^* = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ und damit $z^* = -\frac{1}{3}$

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

2. Stelle:

mit $y^* = -\frac{1}{2}$ ist $x^* = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$ und damit $z^* = \frac{1}{4}$

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Analogon zum Wendepunkt im skalaren Fall

▶ 13

Definition (Sattelpunkt)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf D.

Ist $x^* \in D$ eine stationäre Stelle, dann heißt $(x^* \mid f(x^*))$ ein *Sattelpunkt* von f, wenn es in jeder offenen ε-Umgebung $U \subset D$ von x^* ein $x_1 \in U$ und ein $x_2 \in U$ gibt, so dass

$$f(x^*) < f(x_1) \quad \& \quad f(x^*) > f(x_2)$$

gilt.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2$

hat an der Stelle $(1,1)$ einen Sattelpunkt.

Dr. rer. nat. M. Striebel

2.) Überprüfung auf Vorliegen einer Extremalstelle: hinreichende Bedingung

▶ 14

Erinnerung: skalarer Fall ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Taylorpolynom vom Grade 2 von f um $x^* \in \mathbb{R}$

$$T_{f,2}(x, x^*) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*) + \frac{1}{2} f''(x^*)(x - x^*)^2$$

damit: $f(x) \approx T_{f,2}(x, x^*)$ wenn $|x - x^*| \ll 1$

falls $f'(x^*) = 0$ dann:

$$f(x) \approx f(x^*) + \frac{1}{2} f''(x^*) \cdot \underbrace{(x - x^*)^2}_{\geq 0} \quad (*)$$

1. Fall: $f''(x^*) < 0 \Rightarrow f(x) \leq f(x^*)$ d.h. x^*: lokales Maximum

2. Fall: $f''(x^*) > 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x^*)$ d.h. x^*: lokales Minimum

3. Fall: $f''(x^*) = 0 \Rightarrow (*)$ reicht nicht zur Entscheidung.

im allgemeinen Fall: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

▶ 15

man kann zeigen (mehrdimensionale Taylorentwicklung), dass gilt:

verkörpert 2. Ableitung

$$f(x) \approx \underbrace{f(x^*)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\underbrace{(\nabla f(x^*))^T}_{\in \mathbb{R}^{1\times n}} \cdot \underbrace{(x - x^*)}_{\in \mathbb{R}^n}}_{\in \mathbb{R}} + \frac{1}{2} \underbrace{\underbrace{\underbrace{(x - x^*)^T}_{\in \mathbb{R}^{1\times n}} \cdot \underbrace{H_f(x^*)}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}}}_{\in \mathbb{R}^{1\times n}} \cdot \underbrace{(x - x^*)}_{\in \mathbb{R}^n}}_{\in \mathbb{R}} \quad \in \mathbb{R}$$

verkörpert die 1. Ableitung

für $\|x - x^*\| \ll 1$

ist nun x^* stationäre Stelle (d.h. $\nabla f(x^*) = 0$) dann

Hesse Matrix: symmetrisch

$$f(x) \approx f(x^*) + \frac{1}{2} \underbrace{(x - x^*)^T \cdot H_f(x^*) \cdot (x - x^*)}$$

1. Fall $(x - x^*)^T \cdot H_f(x^*)(x - x^*) < 0 \quad \forall x \in U(x^*) \Rightarrow f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in U(x^*)$

$\Rightarrow x^*$ ist Stelle eines lokalen Maximums

2. Fall $(x - x^*)^T \cdot H_f(x^*)(x - x^*) > 0 \quad \forall x \in U(x^*) \Rightarrow f(x) \geq f(x^*) \quad \forall x \in U(x^*)$

$\Rightarrow x^*$ ist Stelle eines lokalen Minimums

weiterer Fall:

$\exists\, x_1, x_2 \in U(x^*)$ mit $(x_1 - x^*)^T \cdot H_f(x^*) \cdot (x_1 - x^*) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x^*)$

und $(x_2 - x^*)^T \cdot H_f(x^*) \cdot (x_2 - x^*) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x^*)$

$\Rightarrow x^*$ ist Stelle eines Sattelpunktes

Dr. rer. nat. M. Striebel

Der entscheidende Ausdruck $(x-x^*)^T \cdot H_f(x^*) \cdot (x-x^*)$ ist eine quadratische Form:

▶ 16

Definition (quadratische Form)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix.

Die Funktion $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto q_A(\vec{x})$ mit

$$q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

heißt *quadratische Form (zur Matrix A)*.

Beispiel:

i) für $A = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist $q_E(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$

▶ 17

ii) für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist

$$q_A(\vec{x}) = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1\cdot x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

im Kontext der Extremwertbestimmung interessiert man sich für:

Definition (Definitheit)

▶ 18

Man nennt die quadratische Form q_A sowie die Matrix A ...

- *positiv definit* $:\Leftrightarrow q_A(\vec{u}) > 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{o}\}$
- *negativ definit* $:\Leftrightarrow q_A(\vec{u}) < 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{o}\}$
- *indefinit* $:\Leftrightarrow \exists \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{o}\}$, so dass $q_A(\vec{u}) > 0$ & $q_A(\vec{v}) < 0$

Die aus dem skalaren Fall bekannte hinreichende Bedingung die auf f'' basiert geht über

Satz (hinreichende Bedingung)

▶ 19

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar auf D.

f hat im stationären Punkt $x^* \in D$ ...

- ein lokales Minimum, wenn $H_f(x^*)$ positiv definit ist,
- ein lokales Maximum, wenn $H_f(x^*)$ negativ definit ist,
- einen Sattelpunkt, wenn $H_f(x^*)$ indefinit ist

mit $H_f(x^*) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell} f(x^*) \right)_{k,\ell = 1,\dots,n}$

Dr. rer. nat. M. Striebel

Zur Bestimmung der Definitheit einer symmetrischen Matrix

▶ 20

Erinnerung: symmetrische Matrix & Diagonalisierbarkeit

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch $:\Leftrightarrow A^T = A$ ▶ 21
- A symmetrisch $\Rightarrow$ A diagonalisierbar mit Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ & orthogonaler Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (d.h. $T^T \cdot T = E_n$)

genauer: $A = T \cdot D \cdot T^T$

quadratische Form:

$$q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \cdot T \cdot D \cdot T^T \cdot \vec{x} = (T^T \cdot \vec{x})^T \cdot D \cdot T^T \cdot \vec{x}$$ ▶ 22

$$(T^T \cdot \vec{x})^T = \vec{x}^T \cdot (T^T)^T = \vec{x}^T \cdot T$$

$$\underset{\vec{z} := T^T \vec{x}}{=} \vec{z}^T \cdot D \cdot \vec{z} = (z_1, \dots, z_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } z_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{R} \ \forall k = 1, \dots, n$$

$$= (z_1, z_2, \dots, z_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot z_1 \\ \lambda_2 \cdot z_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \cdot z_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \underbrace{z_1^2}_{\geq 0} + \lambda_2 \cdot \underbrace{z_2^2}_{\geq 0} + \dots + \lambda_n \cdot \underbrace{z_n^2}_{\geq 0} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \underbrace{z_k^2}_{\geq 0}$$

qualitativ:

- falls $(\lambda_1 > 0) \wedge (\lambda_2 > 0) \wedge \dots \wedge (\lambda_n > 0)$, d.h. falls alle EW von A positiv sind
  $\Rightarrow q_A(\vec{x}) > 0$ (positiv definit)
- falls $(\lambda_1 < 0) \wedge \dots \wedge (\lambda_n < 0)$, d.h. falls alle EW von A negativ sind
  $\Rightarrow q_A(\vec{x}) < 0$ (negativ definit)
- falls EW mit unterschiedlichen VZ existieren dann: q_A indefinit.

Satz (Definitheit – Eigenwertkriterium) ▶ 23

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ seien die Eigenwerte von A

Dann gilt

- A ist positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_k > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$
- A ist negativ definit $\Leftrightarrow \lambda_k < 0$ für alle $k = 1, \dots, n$
- A ist indefinit $\Leftrightarrow$ es gibt positive und negative Eigenwerte

Dr. rer. nat. M. Striebel

Alternative Kriterien :

Satz (positive, negative Definitheit – Minorenkriterium)

▶ 24

Es sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix.

Für $k \in \{1, \dots, n\}$ nennt man

$$\Delta_k := \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

den $k$ten *Hauptminor*.

Damit gilt

- A ist positiv definit $\Leftrightarrow \Delta_k > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$
- A ist negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^k \Delta_k > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$

Satz (Definitheit für $n = 2$ – Spezialfall!)

▶ 25

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

eine reelle symmetrische 2×2-Matrix. Dann gilt

- A ist positiv definit $\Leftrightarrow a > 0$ <u>und</u> $\det(A) = a \cdot c - b^2 > 0$
- A ist negativ definit $\Leftrightarrow a < 0$ <u>und</u> $\det(A) = a \cdot c - b^2 > 0$
- A ist indefinit $\Leftrightarrow \det(A) = a \cdot c - b^2 < 0$

Beispiel fortsetzung

i) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$\nabla f(x,y) = (2(x-1), 2(y-1))^T$, stationäre Stelle: $(x^*, y^*) = (1,1)$

▶ 26

Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$

alle EW positiv $\Rightarrow H_f(1,1)$ positiv definit $\Rightarrow (x^*, y^*) = (1,1)$ ist Stelle eines lokalen Minimums

Dr. rer. nat. M. Striebel

ii) $f(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2$

$\nabla f(x,y) = (2(x-1), -2(y-1))^T \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ▶ 27

stationäre Stelle $(x^*, y^*) = (1,1) \Rightarrow H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

EWe: $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$

unterschiedliche VZ der EWe $\Rightarrow H_f(1,1)$ indefinit

daher: $(1,1)$ Stelle eines Sattelpunktes

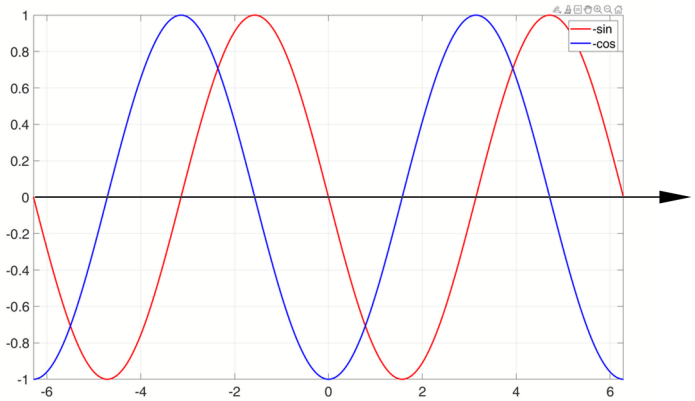
iii) $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$

$\nabla f(x,y) = (\cos(x), -\sin(y))^T \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix}$ ▶ 28

Stationäre Stellen $(x^*, y^*) = \left((2\ell+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k\cdot\pi\right)$ für $k, \ell \in \mathbb{Z}$

damit: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin\left((2\ell+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\cos(k\cdot\pi) \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \underline{-\sin\left((2\ell+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$, $\lambda_2 = \underline{-\cos(k\cdot\pi)}$



$-\cos(k\cdot\pi) = \begin{cases} +1 & : k = 1, -1, 3, -3, \ldots \\ -1 & : k = 0, 2, -2, 4, -4, \ldots \end{cases}$

d.h. $-\cos(k\cdot\pi)$: >0 für k ungerade
<0 für k gerade

$-\sin\left((2\ell+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1 & : \ell = 0, 2, -2 \\ +1 & : \ell = 1, -1, +3, -3 \end{cases}$

d.h. $-\sin\left((2\ell+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$: >0 für ℓ ungerade
<0 für ℓ gerade

<u>Fall 1</u>: $(\lambda_1 > 0) \wedge (\lambda_2 > 0)$ d.h. $H_f(x^*, x^*)$ positiv definit, d.h. $\left((2\ell+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k\cdot\pi\right)$ Minimumstelle:

für ℓ ungerade, k ungerade

<u>Fall 2</u>: $(\lambda_1 < 0) \wedge (\lambda_2 < 0)$ d.h. $H_f(x^*, y^*)$ negativ definit, d.h. $\left((2\ell+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k\cdot\pi\right)$ Maximumstelle

für ℓ gerade, k gerade

Für (ℓ gerade & k ungerade) bzw. (ℓ ungerade & k gerade): Sattelpunkt an $\left((2\ell+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k\cdot\pi\right)$

Dr. rer. nat. M. Striebel

iv) $f(x,y,z) = 2x^2 - x\cdot y + 2\cdot x\cdot z - y + y^3 + z^2$

$\nabla f(x,y,z) = (4x - y + 2z, -x - 1 + 3y^2, 2x + 2z)^T$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Stationäre Stellen

P_1: $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

P_2 $(x^*, y^*, z^*) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

für P_1: $H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

mit Matlab festgestellt: alle EWe positiv

$\Rightarrow$ H_f positiv definit

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ Stelle eines lokalen Minimums

P_2: $H_f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

mit Matlab festgestellt: unterschiedliche EW-Vorzeichen

$\Rightarrow$ H_f indefinit

$\Rightarrow$ $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ Stelle eines Sattelpunktes

Dr. rer. nat. M. Striebel