Veranschaulichung

▶ 1

$\mathbb{R}^2$

Aufbau: $\mathbb{R}^2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ ▶ 2

spezielle Vektoren:
- Nullvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Standardeinheitsvektoren: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Norm: $\|\vec{e}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ ← $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\|$
  $\|\vec{e}_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

▶ 3 Idee: • Norm als „Länge" interpretieren

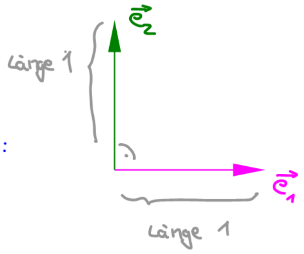
- $\sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$: $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

  $\Rightarrow \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$

• Orthogonalität als Einschluss eines rechten Winkels interpretierbar

$\Downarrow$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ als grafische Objekte interpretierbar:



▶ 4 Verallgemeinerung:

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^2: \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ mit } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$$= a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ 0 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$$

1.) Veranschaulichung von skalaren Multiplikation eines Standardvektors

am Fall $a_1 \cdot \vec{e}_1$ mit $a_1 \in \mathbb{R}$

- falls $a_1 = 0$: $a_1 \cdot \vec{e}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 = \vec{o}$
- falls $a_1 \neq 0$:

  i) $\| a_1 \cdot \vec{e}_1 \| = |a_1| \cdot \|\vec{e}_1\| = |a_1|$ ($a_1 \cdot \vec{e}_1 \triangleq$ Objekt mit Länge $|a_1|$)

  ii) Winkel zwischen $\vec{e}_1$ & $a_1 \cdot \vec{e}_1$: α mit

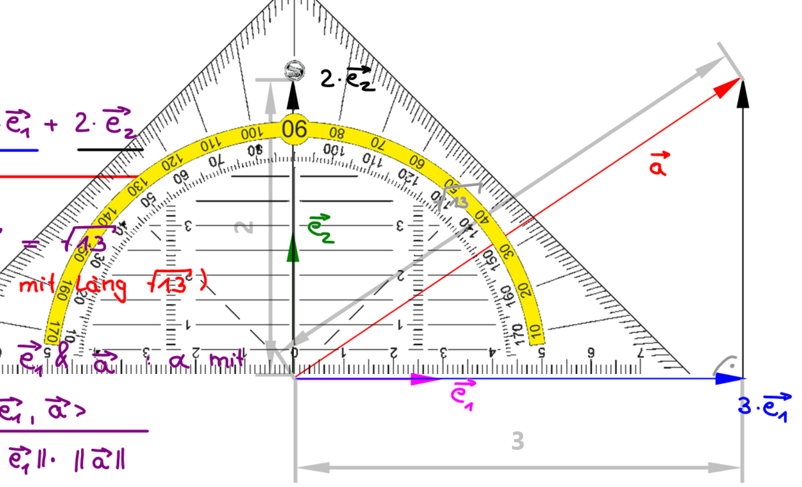
$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{e}_1, a_1 \cdot \vec{e}_1 \rangle}{\|\vec{e}_1\| \cdot \|a_1 \cdot \vec{e}_1\|} = \frac{a_1 \cdot \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle}{\|\vec{e}_1\| \cdot \|a_1 \cdot \vec{e}_1\|} = \frac{a_1}{|a_1|} = \begin{cases} +1, & \text{falls } a_1 > 0 \\ -1, & \text{falls } a_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0, & \text{falls } a_1 > 0 \\ \pi, & \text{falls } a_1 < 0 \end{cases}$$

($a_1 \cdot \vec{e}_1 \triangleq$ Objekt das in die gleiche Richtung zeigt wie das Objekt das $\vec{e}_1$ darstellt wenn $a_1 > 0$ und in die entgegengesetzte Richtung, wenn $a_1 < 0$)

Beispiel:

$\vec{a} = \binom{3}{2} = 3 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2$



▶ 5

- $\| \vec{a} \| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

  ($\vec{a}$ ≙ Objekt mit Läng $\sqrt{13}$)

- Winkel zwischen $\vec{e}_1$ & $\vec{a}$: α mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{e}_1, \vec{a} \rangle}{\| \vec{e}_1 \| \cdot \| \vec{a} \|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \left\langle \binom{1}{0}, \binom{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (1 \cdot 3 + 0 \cdot 2) = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \approx 0{,}5880 \ [\text{rad}] \quad (\approx 33{,}7^\circ)$$

⌜ Trigonometrie

- Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$
- $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$ hier: $\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ d.h. Ankathete-Länge: 3

  Hypothenuse-Länge $\sqrt{13}$

  mit $\sqrt{13} = \sqrt{9+4}$

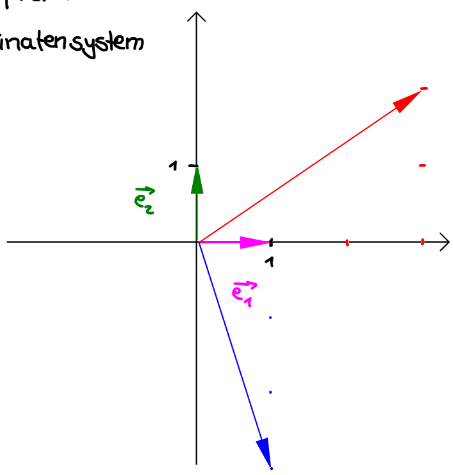
  $= \sqrt{3^2 + 2^2}$

Darstellung / Interpretation des $\mathbb{R}^2$

Kartesisches Koordinatensystem

▶ 6

- Vektoren des $\mathbb{R}^2$ werden interpretiert als Pfeile im Kartesischen Koordinatensystem



$\vec{a} = \binom{3}{2}$

$\vec{b} = \binom{1}{-3}$

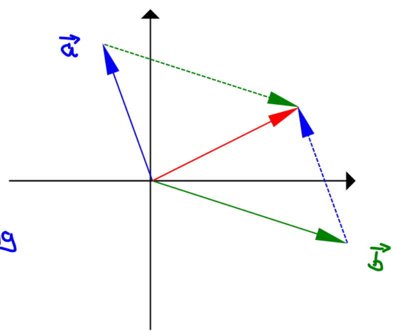
- **Vektoraddition**

$$\vec{a} + \vec{b} = \binom{a_1}{a_2} + \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}$$

▶ 7

interpretierbar als Bildung einer Pfeilkette

(Parallelverschiebung gefolgt von Verbindung des Anfangspunktes des ersten Pfeils mit Endpunkt des zweiten Pfeils)

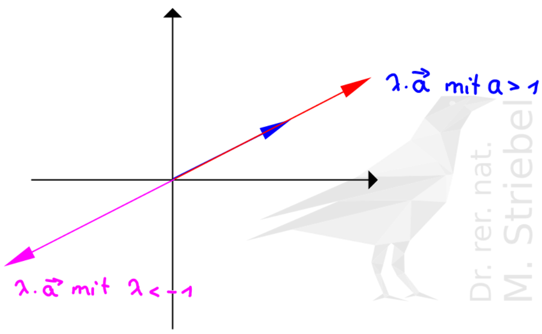


- **Skalare Multiplikation**

▶ 8

$$\lambda \in \mathbb{R}, \ \vec{a} = \binom{a_1}{a_2} : \ \lambda \cdot \vec{a} = \binom{\lambda \cdot a_1}{\lambda \cdot a_2}$$

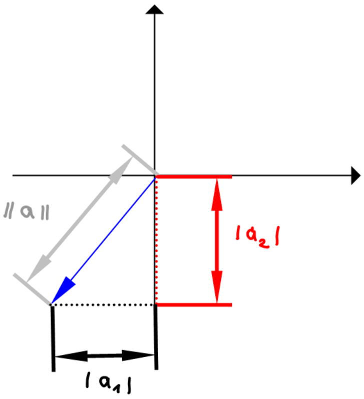
interpretierbar als Streckung / Stauchung eines Pfeiles evtl. mit Richtungsumkehr ($\lambda < 0$)



- Norm

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

interpretierbar als Hypothenuse
in einem rechtwinkligen Dreieck
mit den Kathetenlängen $|a_1|$ & $|a_2|$

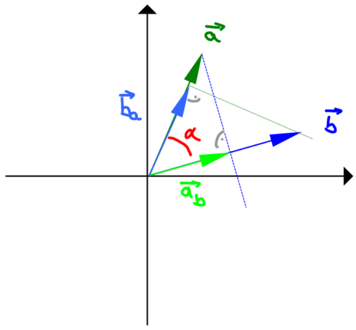


▶ 9

- Winkel & Skalarprodukt:

  - Winkeldefinition $\dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \cos(\alpha)$
    ist messbar

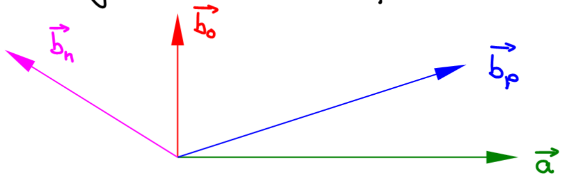
  - Skalarprodukt kann über Projektionen interpretiert werden
    $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}_a\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}_b\|$



▶ 10

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

Bemerkung: Bedeutung des VZ des Skalarproduktes



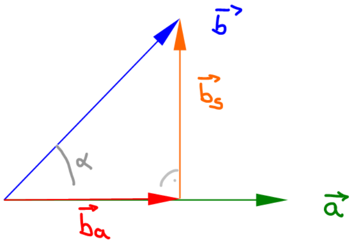
$\langle \vec{a}, \vec{b}_o \rangle = 0$: $\vec{a} \perp \vec{b}_o$

$\langle \vec{a}, \vec{b}_p \rangle > 0$: spitzer Winkel

$\langle \vec{a}, \vec{b}_n \rangle < 0$: stumpfer Winkel

Anwendung des Skalarproduktes – orthogonale Zerlegung & Projektion

▶ 11



gegeben: $\vec{a}, \vec{b}$

gesucht: $\vec{b}_a$ & $\vec{b}_s$ so dass: • $\vec{b}_a$ & $\vec{a}$ kollinear ($\vec{b}_a$ ist Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$)

orthogonale Zerlegung des Vektors $\vec{b}$

• $\vec{b}_s \perp \vec{a}$

• $\vec{b} = \vec{b}_a + \vec{b}_s$

orthogonale Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Bestimmung: • $\vec{b}_a$ kollinear zu $\vec{a} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{b}_a = \lambda \cdot \vec{a}$

hier: α spitzer Winkel $\Rightarrow \lambda > 0$

$$\vec{b}_a = \lambda \cdot \vec{a} \Rightarrow \|\vec{b}_a\| = \|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\| = \lambda \cdot \|\vec{a}\|$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\|\vec{b}_a\|}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

somit: $\vec{b}_a = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a}$

man kann zeigen $\vec{b}_s \perp \vec{b}_a$ (selber machen)

somit $\vec{b}_s = \vec{b} - \vec{b}_a$ ← direkt anwendbar in $\mathbb{R}^n$

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_a = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a} \qquad \ulcorner \text{NR: } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1\cdot 3 - 2\cdot 8 = 3 - 16 = -13$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5 \lrcorner$$

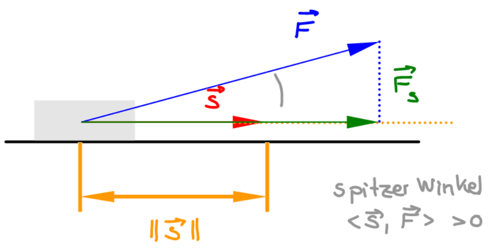
$$= \frac{-13}{5} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -13/5 \\ 26/5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_s = \vec{b} - \vec{b}_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13/5 \\ 26/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{5} + \frac{13}{5} \\ \frac{40}{5} - \frac{26}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/5 \\ 14/5 \end{pmatrix}$$

Anwendung (orthogonale Projektion in der Physik) ▶ 12

Physik: „Arbeit = Kraft mal Weg" Skalarprodukt von Kraft und Weg

eigentlich: aufgebrachte Kraft in Wegrichtung mal Wegstrecke



$$W = \|\vec{F}_s\| \cdot \|\vec{s}\| = \left\| \boxed{\frac{\langle \vec{s}, \vec{F} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle}} \cdot \vec{s} \right\| \cdot \|\vec{s}\|$$

$$= \left| \frac{\langle \vec{s}, \vec{F} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle} \right| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \|\vec{s}\|$$

$$= \frac{\langle \vec{s}, \vec{F} \rangle}{\cancel{\|\vec{s}\|^2}} \cdot \cancel{\|\vec{s}\|^2} = \langle \vec{s}, \vec{F} \rangle$$

gilt formal auch für stumpfe Winkel (dann $\langle \vec{s}, \vec{F} \rangle$ negativ)

Veranschaulichung im $\mathbb{R}^3$ ▶ 13

Aufbau: $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

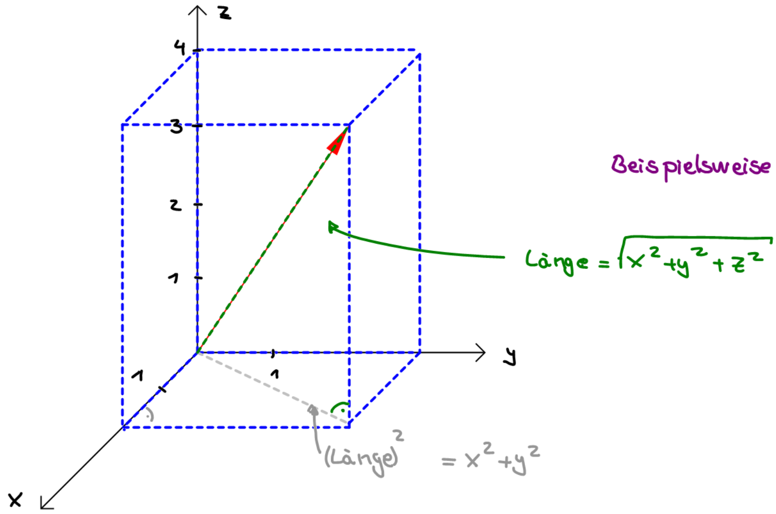
spezielle Vektoren:
- Nullvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 3 Standardeinheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

damit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$

grafische Repräsentation: Kartesisches Koordinatensystem mit 3 Achsen

(dargestellt als Projektion in eine Ebene)



Beispielsweise : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$